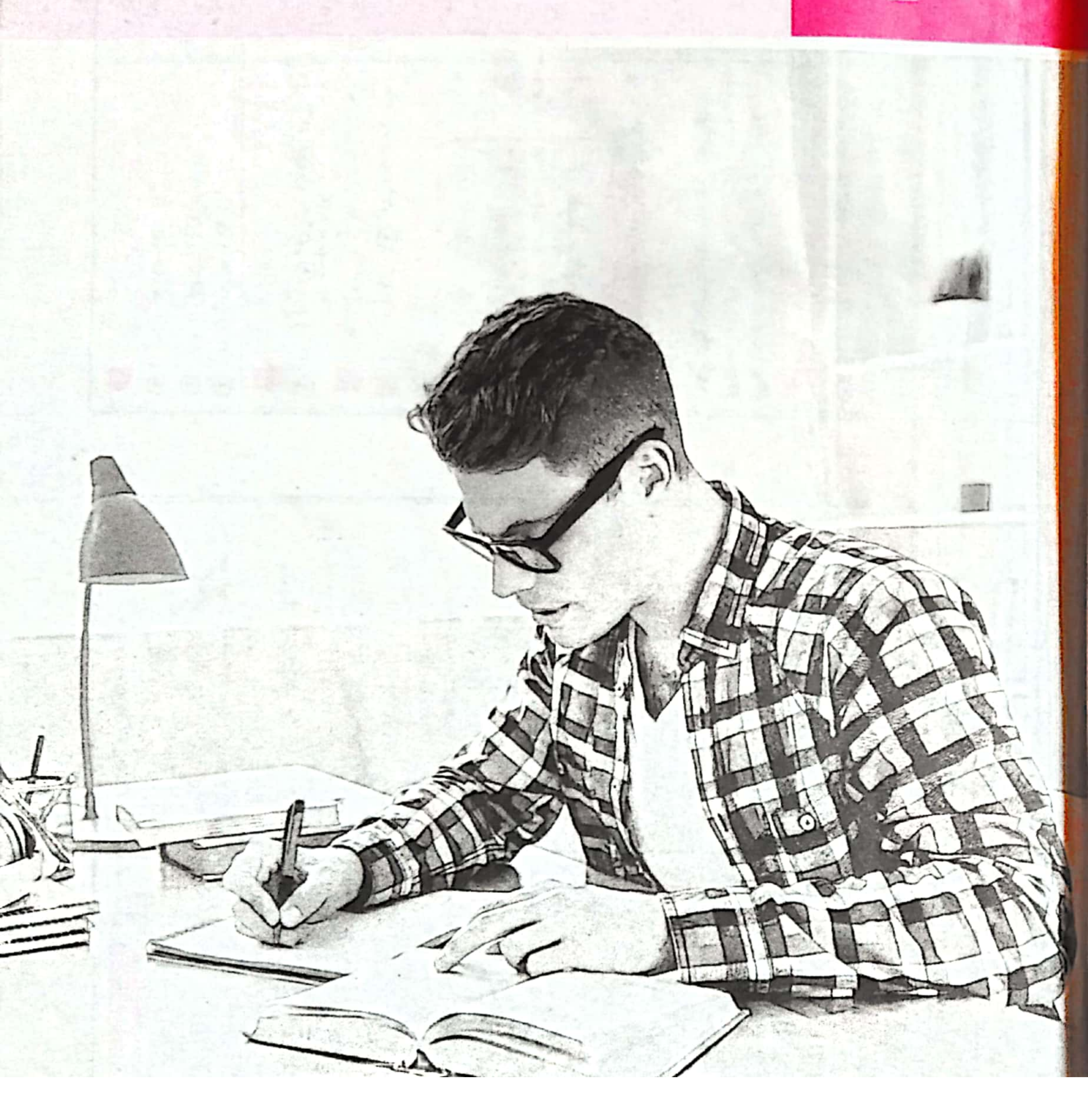

الرياضيات البحتة
الجزء الخاص بالإجابات
2022
الجبر و الهندسة الفراغية
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم
3
ثانوى

إجابات تمارين

الوحدة 1

التباديل والتوافيق
و نظرية ذات الحدين



إجابات تمارين 1

1

(١) (ج) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (أ)
(٦) (ج) (٧) (ب) (٨) (ج) (٩) (ج) (١٠) (ب)
(١١) (د) (١٢) (ج) (١٣) (ج) (١٤) (ج) (١٥) (أ)
(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (ب) (١٩) (د) (٢٠) (د)
(٢١) (أ) (٢٢) (د) (٢٣) (ج) (٢٤) (أ) (٢٥) (ب)
(٢٦) (ب) (٢٧) (ج) (٢٨) (أ) (٢٩) (ج) (٣٠) (ج)
(٣١) (أ) (٣٢) (أ) (٣٣) (د) (٣٤) (د) (٣٥) (ج)
(٣٦) (أ) (٣٧) (د)

2

(١) $^{5}ق_{2} = ١٠$ (٢) $^{5}ل_{2} = ٦٠$
(٣) $٥^{3} = ١٢٥$ (٤) $٣ \times ٤ \times ٣ = ٣٦$
(٥) $١ \times ٣ \times ٣ + ١ \times ٣ \times ٢ = ١٥$

3

(١) $٢ \times ٥ \times ٣ + ٢ \times ٥ \times ٥ \times ٥$
$+ ٢ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ١٥٢٠$
(٢) $١ \times ٢ \times ٣ + ١ \times ٢ \times ٣ \times ٢$
$+ ٢ \times ٤ \times ٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١١١$

4

(١) $^{4}ل_{2} = ٢٤$ (٢) $^{4}ل_{1} + {}^{4}ل_{2} = ٤٨$
(٣) $^{4}ل_{1} + {}^{4}ل_{2} + {}^{4}ل_{3} = ٤٠$

5

عدد الأعداد = $٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{6}ل_{4} = ٣٦٠$
عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ = $١ \times {}^{5}ل_{3} = ٦٠$
عدد الأعداد الزوجية = $٣ \times {}^{5}ل_{3} = ١٨٠$

6

(١) [illegible] $= ٤٠$ (٢) [illegible] $= ١٤$
(٣) [illegible] $= ١٢٦٠$
(٤) [illegible] $= ٥١٢٠٠$
(٥) [illegible] $= ١٥$
(٦) نضع كرة في كل صندوق ثم نوزع باقي الكرات فيكون عدد الطرق [illegible] $= ٢١$
(٧) [illegible] $= ٢٥٢٠$
(٨) (١) • إذا كانت الأماكن متمايزة [illegible] $= ٢٤٠$
• إذا كانت الأماكن متماثلة $= ٤! = ٢٤$
(٢) $٧ \; ٤! = ١٦٨$

7

(١) [illegible] $= ٢٠$ (٢) [illegible] $= ١٢$
(٣) [illegible] $= ١٦$
(٤) [illegible] $= ١٦$

8

(١) [illegible] $= ١٨٥٦٤$ (٢) [illegible] $= ٢٣٨$
(٣) [illegible] $= ٥٨٨٠$
(٤) [illegible] $= ٩٠٢٠$

9

(١) [illegible] $= ٤٩٥$
(٢) [illegible] $= ٢٥٢$
(٣) [illegible]
$= ٣٦٩$

10

[illegible] $= ٢٩$

11

[illegible] $= ٦$

(٦) الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ هي:
(٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ... ، ١٤٥) عددهم ١٥ عدد
، ∵ عدد الأعداد المعطاة كلها يساوي ٧٦ عدد
، ولكي يكون حاصل الضرب مضاعف للعدد ٥
إما أن نأخذ العددين من الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ (٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ... ، ١٤٥) أو نأخذ عدد واحدًا من الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ وعددًا آخر من باقي الأعداد
∴ عدد الطرق = [illegible]
$= ١٠٢٠$

(٧) أولًا: لتكوين خط مستقيم نحتاج إلى نقطتين

عدد النقاط المختارة من ٤ نقاط الموجودة على الاستقامة الواحدة	عدد النقاط المختارة من ٦ نقاط المتبقية	عدد المستقيمات المتكونة
صفر	٢	$^{4}ق_{0} \times {}^{6}ق_{2} = ١٥$
١	١	$^{4}ق_{1} \times {}^{6}ق_{1} = ٢٤$
٢	صفر	١

∴ عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها
$= ١٥ + ٢٤ + ١ = ٤٠$ مستقيم

ثانيًا: لتكوين مثلث نحتاج إلى ثلاثة نقاط

عدد النقاط المختارة من ٤ نقاط الموجودة على الاستقامة الواحدة	عدد النقاط المختارة من ٦ نقاط المتبقية	عدد المثلثات المتكونة
صفر	٣	$^{4}ق_{0} \times {}^{6}ق_{3} = ٢٠$
١	٢	$^{4}ق_{1} \times {}^{6}ق_{2} = ٦٠$
٢	١	$^{4}ق_{2} \times {}^{6}ق_{1} = ٣٦$
٣	صفر	صفر

∴ عدد المثلثات التي يمكن تكوينها
$= ٢٠ + ٦٠ + ٣٦ = ١١٦$ مثلث

ثالثًا: لتكوين شكل رباعي نحتاج إلى أربعة نقاط

عدد النقاط المختارة من ٤ نقاط الموجودة على الاستقامة الواحدة	عدد النقاط المختارة من ٦ نقاط المتبقية	عدد الأشكال الرباعية المتكونة
صفر	٤	$^{4}ق_{0} \times {}^{6}ق_{4} = ١٥$
١	٣	$^{4}ق_{1} \times {}^{6}ق_{3} = ٨٠$
٢	٢	$^{4}ق_{2} \times {}^{6}ق_{2} = ٩٠$
٣	١	صفر
٤	صفر	صفر

∴ عدد الأشكال الرباعية التي يمكن تكوينها
$= ١٥ + ٨٠ + ٩٠ = ١٨٥$ شكل رباعي

17

(١) عدد الطرق $= ٥! = ١٢٠$ طريقة
(٢) نعتبر أ ، ب على أنهما وحدة واحدة
[أ ، ب] [ج] [د] [هـ]
∴ عدد طرق جلوسهم $= ٤! = ٢٤$
، ∵ أ ، ب يمكنهما الجلوس متجاورين بعدد طرق $٢! = ٢$
[أ ، ب] ، [ب ، أ]
∴ عدد الطرق $= ٢ \times ٢٤ = ٤٨$
(٣) إذا كان أ ، ب يجب ألا يجلسا متجاورين
∴ عدد الطرق = العدد الكلي − عدد طرق جلوس أ ، ب متجاورين $= ١٢٠ - ٤٨ = ٧٢$
(٤) نعتبر ب ، جـ ، د وحدة واحدة
[أ] [ب ، جـ ، د] [هـ]
∴ عدد طرق جلوسهم $= ٣!$
، ∵ ب ، جـ ، د يمكنهم الجلوس متجاورين بعدد طرق $= ٣!$
∴ عدد الطرق $= ٣! \times ٣! = ٣٦$
(٥) عدد طرق جلوس أ ، هـ في الطرفين $= ٢!$
، عدد طرق جلوس ب ، جـ ، د بينهما $= ٣!$
∴ عدد الطرق $= ٢! \times ٣! = ١٢$

12

(١) $١٢^{2} \times ٨^{2} = ١١٠٥٩٢$
(٢) [illegible] $= ٧٢٩٢٠$
(٣) [illegible] $= ١١١٦٠$

13

(١) [illegible] $= ١$ (٢) [illegible] $= ١٠$ (٣) [illegible] $= ٢٠$

14

(١) [illegible] $- ٦ = ٩$ (٢) [illegible] $- ٨ = ٢٠$
(٣) [illegible] $- ١١ = ٥٤$

15

لرسم المثلث يمكن اختيار نقطة واحدة من $ل_{1}$ واختيار نقطتين من $ل_{2}$ أو العكس
∴ عدد المثلثات [illegible] $= ٣٠$
حل آخر:
اختيار ثلاثة فقط من ٧ نقاط بشرط أن تكون النقاط ليست على استقامة واحدة
أي عدد المثلثات [illegible] $= ٣٠$

16

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (د)
(٧) أولًا: (أ) ثانيًا: (د) ثالثًا: (جـ)

إرشادات لحل رقم 16

(١) • إذا اختير العدد صفر في خانة الآحاد ، ٦ أو ٧ في خانة المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$ طرق
• إذا اختير العدد ٢ في خانة الآحاد ، ٦ أو ٧ في خانة المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$ طرق
• إذا اختير العدد ٦ في خانة الآحاد ، ٧ في خانة المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٣ \times ١ = ٣$ طرق
∴ عدد طرق تكوين العدد الزوجي الأكبر من ٥٠٠ ومكون من ٣ أرقام مختلفة $= ٦ + ٦ + ٣ = ١٥$ طريقة
(٢) الحالة الأولى: العدد مكون من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥
∴ عدد الطرق $= ٥! = ١٢٠$ طريقة
الحالة الثانية: العدد مكون من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥
∴ عدد الطرق $= ٤ \; ٤! = ٩٦$ طريقة
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١٢٠ + ٩٦$
$= ٢١٦$ طريقة
(٣) بفرض أن عدد أضلاع المضلع = ن ضلعًا
∴ [illegible] $= ن + ٢$ ∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢} = ن + ٢$
∴ $ن^{2} - ن = ٦ن$ ∴ $ن^{2} - ٧ن = ٠$
∴ $ن(ن - ٧) = ٠$ ∴ ن = صفر (مرفوض)
، ن = ٧
∴ عدد الأضلاع = ٧ أضلاع
(٤) عدد طرق جلوس ٤ أولاد $= ٤!$
، عدد طرق جلوس ٢ بنات $= ٢!$
، عدد طرق تبديل الأولاد مع البنات $= ٢! = ٢$
∴ عدد الطرق $= ٢ \times ٤! \times ٢! = ١٨٨$
[٤ أولاد] [٢ بنات] أو [٢ بنات] [٤ أولاد]
(٥) ∵ عدد طرق اختيار صورة كل عنصر من عناصر س = ٢ (أ أو ب)
∴ عدد الدوال الممكنة من س إلى ص $= ن^{3}$
$= ٢^{3} = ٨$

18

مجموع الرقمين فردي يعني أن أحد الرقمين فردي والآخر زوجي أي أن [ز] [ف] أو [ف] [ز]
∴ عدد الطرق $= ٥ \times ٥ + ٥ \times ٤ = ٤٥$

19

(اختيار الطبيبين معًا و اختيار ٣ أطباء من ١٠ الآخرين) أو (عدم اختيار أي من الطبيبين و اختيار ٥ أطباء من ١٠ الآخرين) = [illegible] $= ٣٧٢$

20

(اختيار أحد المحللين الرافضين العمل معًا و اختيار ٤ محللين من ١٠ الآخرين) أو (عدم اختيار أي من المحللين و اختيار ٥ محللين من ١٠ الآخرين)
= [illegible] $= ٦٧٢$

إجابات تمارين 2

1

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (ب)
(٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (ب)
(١١) (ب) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (جـ) (١٥) (جـ)
(١٦) (د) (١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (أ) (٢٠) (ب)
(٢١) (د) (٢٢) (ب)

2

(١) ∵ [illegible] $= ١$ ∴ $ن - ٣ = ١$ ومنها $ن = ٤$
أو $ن - ٣ = ٠$ ومنها $ن = ٣$
(٢) [illegible] $= ٢٤ = ٤!$ ∴ $١٠ - ن = ٤$
∴ $ن = ٦ - ٢!$ [illegible] ∴ $ن = ٣$
(٣) [illegible] $\times ٩٠$ [illegible]
∴ $(ن + ٢)(ن + ١)$ [illegible] $= ٩٠$ [illegible]
∴ $(ن + ٢)(ن + ١) = ١٠ \times ٩$
∴ $ن + ٢ = ١٠$ ∴ $ن = ٨$
(٤) [illegible]
∴ $ن(ن + ١)$ [illegible]
∴ $ن(ن + ١)(ن + ٢) = ٢ \times ٣ \times ٤$
∴ $ن = ٢$
(٥) ∵ [illegible]
∴ [illegible]
∴ $ن - ٢ = ٦$ ∴ $ن = ٨$
(٦) [illegible] $= ٢٥٢٠$ [illegible]
∴ $٢ن - ٤ = ٦$ ∴ $ن = ٥$
(٧) [illegible] $= ٦٧٢٠$ [illegible]
∴ $٢ن - ١ = ٥$ ∴ $ن = ٣$
(٨) [illegible] $= ٦٦$
∴ [illegible] $= ٦٦$
∴ [illegible] $= ٦٦$ ∴ [illegible] $= ١٢$
∴ [illegible] $= ٦٦ \times ٢! = ١٣٢ = ١٢ \times ١١$ [illegible]
∴ $ن + ١ = ١٢$ ∴ $ن = ١١$
(٩) [illegible]
∴ $ن = ٦$ أو $ن + ٦ = ١٥$
∴ $ن = ٩$
(١٠) [illegible]
∴ [illegible]
∴ [illegible]
∴ $ن = ٦$
(١١) [illegible]
∴ $٢ \leq ن \leq ١١$
∴ ن ∈ {٣ ، ٤ ، ٥ ، ... ، ١١}
(١٢) [illegible]
∴ ن ∈ {١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ...}

⑬ $\because {}^{ن}ل_{ن-2} = 6!$

$\therefore {}^{ن}ل_{ن-2} = {}^{6}ل_{...}$ أو ${}^{ن}ل_{ن-2} = {}^{6}ل_{6}$

$\therefore$ [illegible] ومنها $ن = 9$

أو $ن - 2 = 6$ ومنها $ن = 8$

⑭ [illegible]

$\therefore ن + 2 = 2 - ن \quad \therefore 2ن =$ صفر

$\therefore ن =$ صفر أو $ن + 2 + 2 - ن = 4$

$\therefore 4 = 4$ أي أنها متحققه لجميع قيم ن

بحيث $ن + 2 \leq 4$ ، $2 - ن \leq 4$

$\therefore ن \leq 2$ ، $ن \geq -2$

أي أن : $ن \in \{2 ، 1 ، 0 ، -1 ، -2\}$

$\therefore ن - 1 = 6 \qquad \therefore ن = 7$

$\because {}^{ن}ل_{ر+1} = 210$

$\therefore {}^{7}ل_{ر+1} = 210 = {}^{7}ل_{3}$

$\therefore ر + 1 = 3 \qquad \therefore ر = 2$

⑤ $\because |ن - ر = 6 = |3 \qquad \therefore ن - ر = 3$

$\therefore ر = ن - 3 \qquad ، \because {}^{ن}ق_{ر} = 10$

$\therefore {}^{ن}ق_{ن-3} = 10 \qquad \therefore {}^{ن}ق_{3} = 10$

$\therefore \frac{{}^{ن}ل_{3}}{|3} = 10$

$\therefore {}^{ن}ل_{3} = 10 \, |3 = 60 = 5 \times 4 \times 3 = {}^{5}ل_{3}$

$\therefore ن = 5 ، ر = 2$

٣

① ${}^{ن}ل_{2} = 2 = {}^{2}ل_{2} \qquad \therefore ن = 2$

$\because {}^{ر+ن}ل_{2} = 90$

$\therefore {}^{ر+2}ل_{2} = 90 = {}^{10}ل_{2}$

$\therefore 2 + ر = 10 \qquad \therefore ر = 8$

② $\because |ر = 120 = |5 \qquad \therefore ر = 5$

$\because {}^{ن}ل_{ر} = 2520$

$\therefore {}^{ن}ل_{5} = 2520 = {}^{7}ل_{5} \qquad \therefore ن = 7$

$\therefore |3ر - 2ن = |3(5) - 2(7) = |15 - 14$

$= |1 = 1$

③ ${}^{ن}ق_{2} = 21 \qquad \therefore \frac{{}^{ن}ل_{2}}{|2} = 21$

$\therefore {}^{ن}ل_{2} = 21 \, |2 = 42 = 7 \times 6 = {}^{7}ل_{2}$

$\therefore ن = 7 \qquad ، \because {}^{ن+ر}ل_{2} = 990$

$\therefore {}^{7+ر}ل_{2} = 11 \times 10 \times 9 = {}^{11}ل_{3}$

$\therefore 7 + ر = 11 \qquad \therefore ر = 4$

④ ${}^{ن}ق_{3} = 5ن$

$\therefore \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3 \times 2 \times 1} = 5ن$

$\therefore (ن - 1)(ن - 2) = 5 \times 6$

٤

① $\because {}^{ن}ل_{ر} = 120$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر} = 120 = {}^{120}ل_{1}$

$\therefore ن = 120 ، ر = 1$

أو $\therefore {}^{ن}ل_{ر} = 120 = {}^{6}ل_{3} \qquad \therefore ن = 6 ، ر = 3$

أو ${}^{ن}ل_{ر} = 120 = {}^{5}ل_{4} \qquad \therefore ن = 5 ، ر = 4$

أو ${}^{ن}ل_{ر} = 120 = {}^{5}ل_{5}$

$\therefore ن = 5 ، ر = 5$

② $\because {}^{ن}ل_{15} < {}^{ن}ل_{14} \qquad \therefore \frac{|ن}{|ن - 15} < \frac{|ن}{|ن - 14}$

$\therefore |ن - 14 < |ن - 15$

$\therefore (ن - 14) \, |ن - 15 < |ن - 15$

$\therefore ن - 14 > 1 \qquad \therefore ن > 15$

$\therefore ن \in \{16 ، 17 ، 18 ، ...\}$

③ $\because {}^{ن}ق_{12} > {}^{ن}ق_{11} \qquad \therefore \frac{{}^{ن}ق_{12}}{{}^{ن}ق_{11}} > 1$

$\therefore \frac{ن - 12 + 1}{12} > 1 \qquad \therefore ن - 11 > 12$

$\therefore ن > 23 \qquad \therefore ن \in \{24 ، 25 ، 26 ، ...\}$

④ $\because {}^{ن}ق_{8} \times {}^{ن}ق_{2} \leq {}^{ن}ق_{7} \times {}^{ن}ق_{3}$

$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{8}}{{}^{ن}ق_{7}} \leq \frac{{}^{ن}ق_{3}}{{}^{ن}ق_{2}}$

⑥ $\because \frac{|ن}{|ن - 2} = 8 \times \frac{|ن - 1}{|ن - 2}$

$\therefore ن \, |ن - 1 = 8 \times |ن - 1$

$\therefore ن = 8$

$\therefore {}^{8+3}ل_{8-3} = {}^{11}ل_{5} = 55440$

⑦ $\because \frac{|6}{|6 - ر} = 4 \times \frac{|6}{|7 - ر}$

$\therefore |7 - ر = 4 \, |6 - ر$

$\therefore (7 - ر) \, |6 - ر = 4 \, |6 - ر$

$\therefore 7 - ر = 4 \qquad \therefore ر = 3$

$\therefore |ر + 1 = |3 + 1 = |4 = 24$

⑧ $\because \frac{|ن}{|ن - ر} = 720 \times \frac{|ن}{|ن - ر \, |ر}$

$\therefore |ر = 720 = |6 \qquad \therefore ر = 6$

$\therefore {}^{ن}ل_{6} = 720 \, {}^{ن}ق_{6} \qquad \therefore ن = 6$

$\therefore {}^{12}ق_{2ر} = {}^{12}ق_{2(6)} = {}^{12}ق_{12} = 1$

⑨ $\because \frac{|18}{|18 - 2ر \, |2ر}$

$= 153 \times \frac{|12}{|18 - 2ر \, |2ر - 5}$

$\therefore \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \, |13}{|18 - 2ر \, (2ر)(2ر - 1)(2ر - 2)(2ر - 3)(2ر - 4) \, |2ر - 5}$

$= \frac{153 \, |13}{|18 - 2ر \, |2ر - 5}$

$\therefore \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{(2ر)(2ر - 1)(2ر - 2)(2ر - 3)(2ر - 4)}$

$= 153$

$\therefore {}^{2ر}ل_{5} = 6720 = {}^{8}ل_{5}$

$\therefore 2ر = 8 \qquad \therefore ر = 4$

$\therefore {}^{10}ل_{4} : {}^{10}ق_{10-4} = {}^{10}ل_{4} : {}^{10}ق_{6}$

$= {}^{10}ل_{4} : {}^{10}ق_{4}$

$= |4 = 24$

⑩ $\because 2 = \frac{{}^{ن}ق_{5}}{{}^{ن}ق_{4}} + \frac{{}^{ن}ق_{6}}{{}^{ن}ق_{5}}$

$\therefore 2 = \frac{5}{ن - 5 + 1} + \frac{ن - 6 + 1}{6}$

$\therefore 2 = \frac{5}{ن - 4} + \frac{ن - 5}{6}$

$= \frac{30 + ن^2 - 9ن + 20}{6ن - 24}$

$\therefore 12ن - 48 = ن^2 - 9ن + 50$

$\therefore ن^2 - 21ن + 98 = 0$

$\therefore (ن - 14)(ن - 7) = 0$

$\therefore ن = 14$ أ، $ن = 7$

⑪ (1) $\frac{{}^{13}ق_{ر} + {}^{13}ق_{ر-1}}{{}^{13}ق_{ر+1} + {}^{13}ق_{ر}} = \frac{{}^{14}ق_{ر}}{{}^{14}ق_{ر+1}}$

$= \frac{ر + 1}{14 - ر - 1 + 1} = 2$

$\therefore 28 - 2ر = ر + 1$

$\therefore 3ر = 27 \qquad \therefore ر = 9$

(2) $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-2}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر-1}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = 2$

$\therefore \frac{{}^{7}ق_{ر}}{{}^{7}ق_{ر-1}} \times \frac{{}^{8}ق_{ر-1}}{{}^{8}ق_{ر-2}}$

$= \frac{7 - ر + 1}{ر} \times \frac{8 - (ر - 1) + 1}{ر - 1}$

$= \frac{8 - ر}{ر} \times \frac{10 - ر}{ر - 1} = 2$

$\therefore \frac{ر^2 - 18ر + 80}{ر^2 - ر} = 2$

$\therefore 2ر^2 - 2ر = ر^2 - 18ر + 80$

$\therefore ر^2 + 16ر - 80 = 0$

$\therefore (ر - 4)(ر + 20) = 0$

$\therefore ر = 4$ أ، $ر = -20$ (مرفوض)

$\therefore \frac{ن - 8 + 1}{8} \leq \frac{6}{ن - 6 + 1}$

$\therefore (ن - 7)(ن - 5) \leq 48$

(لاحظ أن : $ن - 5 > 0$ ، لأن : $ن \geq 8$)

$\therefore ن^2 - 12ن + 35 \leq 48$

$\therefore ن^2 - 12ن + 36 \leq 49$

$\therefore (ن - 6)^2 \leq 49 \qquad \therefore ن - 6 \leq 7$

$\therefore ن \leq 13$ حيث $(ن \in ص^+)$

$\therefore ن \in \{13 ، 14 ، 15 ، ...\}$

٥

① $\because {}^{ن}ق_{4} : {}^{ن-2}ق_{2} = 7 : 2$

$\therefore \frac{|ن}{|4 \, |ن - 4} \div \frac{|ن - 2}{|2 \, |ن - 2 - 2} = \frac{7}{2}$

$\therefore \frac{|ن}{|4 \, |ن - 4} \times \frac{|2 \, |ن - 4}{|ن - 2} = \frac{7}{2}$

$\therefore \frac{ن(ن - 1) \, |ن - 2}{(ن - 4)(4) \, |ن - 5 \, |2} \times \frac{|2 \, |ن - 5}{|ن - 2} = \frac{7}{2}$

$\therefore \frac{ن(ن - 1)}{4(ن - 4)} = \frac{7}{2} \qquad \therefore \frac{ن^2 - ن}{2(ن - 4)} = 7$

$\therefore ن^2 - ن = 14ن - 56$

$\therefore ن^2 - 15ن + 56 = 0$

$\therefore (ن - 8)(ن - 7) = 0 \qquad \therefore ن = 7$ أ، $ن = 8$

② $\because \frac{{}^{7}ق_{ر}}{{}^{7}ق_{ر-1}} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \frac{7 - ر + 1}{ر} = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{8 - ر}{ر} = \frac{1}{3} \qquad \therefore 24 - 3ر = ر$

$\therefore 4ر = 24 \qquad \therefore ر = 6$

③ $\because \frac{{}^{56}ل_{ر+6}}{{}^{54}ل_{ر+3}} = \frac{30800}{1}$

$\therefore \frac{|56}{|56 - ر - 6} \div \frac{|54}{|54 - ر - 3} = \frac{30800}{1}$

$\therefore \frac{|56}{|50 - ر} \times \frac{|51 - ر}{|54} = \frac{30800}{1}$

$\therefore \frac{56 \times 55 \, |54}{|50 - ر} \times \frac{(51 - ر) \, |50 - ر}{|54} = 30800$

$\therefore 56 \times 55 \, (51 - ر) = 30800$

$\therefore 51 - ر = 10 \qquad \therefore ر = 41$

④ $\because \frac{{}^{ن+1}ل_{2}}{{}^{ن-1}ل_{2}} = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{|ن - 1}{|ن - 1 - 2} \div \frac{|ن + 1}{|ن + 1 - 2} = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{|ن - 1}{|ن - 3} \times \frac{|ن - 1}{|ن + 1} = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{|ن - 1}{|ن - 3} \times \frac{(ن - 1)(ن - 2) \, |ن - 3}{(ن + 1)(ن) \, |ن - 1} = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{ن^2 - 3ن + 2}{ن^2 + ن} = \frac{5}{12}$

$\therefore 12ن^2 - 36ن + 24 = 5ن^2 + 5ن$

$\therefore 7ن^2 - 41ن + 24 = 0$

$\therefore ن = 8$ أ، $ن = \frac{3}{7}$ (مرفوض)

$\therefore |ن - 3 = |8 - 3 = |5 = 120$

⑤ $\because \frac{{}^{2ن+1}ل_{ن-1}}{{}^{2ن-1}ل_{ن}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{|2ن + 1}{|ن + 2} \div \frac{|2ن - 1}{|ن - 1} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{|2ن + 1}{|ن + 2} \times \frac{|ن - 1}{|2ن - 1} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{(2ن + 1)(2ن) \, |2ن - 1}{(ن + 2)(ن + 1) ن \, |ن - 1} \times \frac{|ن - 1}{|2ن - 1} =$

$\therefore \frac{4ن + 2}{ن^2 + 3ن + 2} = \frac{3}{5}$

$\therefore 3ن^2 + 9ن + 6 = 20ن + 10$

$\therefore 3ن^2 - 11ن - 4 = 0$

$\therefore (3ن + 1)(ن - 4) = 0$

$\therefore ن = -\frac{1}{3}$ (مرفوض) أ، $ن = 4$

⑫ $\because \frac{{}^{28}ق_{2ر}}{{}^{24}ق_{2ر-4}} = \frac{225}{11}$

$\therefore \frac{|28}{|28 - 2ر \, |2ر} \times \frac{|28 - 2ر \, |2ر - 4}{|24}$

$= \frac{225}{11}$

$\therefore \frac{|28 \, |2ر - 4}{|24 \, |2ر} = \frac{225}{11}$

$\therefore \frac{|2ر - 4}{|2ر} = \frac{225 \, |24}{11 \, |28}$

$\therefore \frac{|2ر}{|2ر - 4} = \frac{11 \, |28}{225 \, |24}$

$\therefore {}^{2ر}ل_{4} = 24024$

$\therefore {}^{2ر}ل_{4} = 24024 = {}^{14}ل_{4}$

$\therefore 2ر = 14 \qquad \therefore ر = 7$

⑬ $(م + ن)(م + ن - 1) \, |م + ن - 2$

$= 380 \, |م + ن - 2$

$\therefore {}^{م+ن}ل_{2} = 380 = {}^{20}ل_{2}$

$\therefore م + ن = 20$

⑭ هناك عدة حالات :

- س > ٢٩ ومنها فإن س = س + ٢ ص

$\therefore ص = 0$

- $س = 29$ ، $س + 2ص = 30 \qquad \therefore ص = \frac{1}{2}$
- $س = 30$ ، $س + 2ص = 29 \qquad \therefore ص = -\frac{1}{2}$
- $س = 30$ ، $س + 2ص = 30 \qquad \therefore ص = 0$
- $س = 29$ ، $س + 2ص = 29 \qquad \therefore ص = 0$

٦

① (د) ② (د) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (أ)

⑪ (ب) ⑫ (أ) ⑬ (أ) ⑭ (جـ) ⑮ (ب)

⑯ (جـ) ⑰ (أ) ⑱ (جـ) ⑲ (د) ⑳ (د)

㉑ (د) ㉒ (جـ) ㉓ (ب) ㉔ (ب) ㉕ (أ)

㉖ (د) ㉗ (ب) ㉘ (جـ) ㉙ (د) ㉚ (أ)

㉛ (د) ㉜ (جـ) ㉝ (جـ) ㉞ (أ) ㉟ (أ)

㊱ (أ) ㊲ (جـ) ㊳ (د) ㊴ (د) ㊵ (د)

㊶ (ب) ㊷ (أ) ㊸ (جـ) ㊹ (د) ㊺ (أ)

㊻ (د) ㊼ (ب) ㊽ (جـ) ㊾ (أ)

٧

① $\because {}^{ن}ق_{ن-2} = 45$

$\therefore {}^{ن}ق_{2} = 45 = {}^{10}ق_{2} \qquad \therefore ن = 10$

، $\because {}^{م}ل_{م-2} = 4$

$\therefore \frac{|م}{|م - م + 2} = 4 \qquad \therefore \frac{|م}{|2} = 4$

$\therefore |م = 4 \, |2 \qquad \therefore |م = |4$

$\therefore م = 4$

$\therefore \frac{{}^{ن}ق_{م-2}}{{}^{ن}ق_{م-1}} = \frac{م - 1}{ن - (م - 1) + 1}$

$= \frac{م - 1}{ن - م + 2} = \frac{4 - 1}{10 - 4 + 2} = \frac{3}{8}$

② $\because {}^{ن}ق_{2} = 120 = {}^{10}ق_{2}$

$\therefore ن = 10$

$\because {}^{10}ق_{ر^2 + 2ر} = {}^{10}ق_{2ر + 5}$

$\therefore ر^2 + 2ر = 2ر + 5$

$\therefore ر^2 = 5 \qquad \therefore ر = \pm\sqrt{5}$ (مرفوض)

أ، $ر^2 + 2ر + 2ر + 5 = 10$

$\therefore ر^2 + 4ر - 5 = 0$

$\therefore (ر + 5)(ر - 1) = 0$

$\therefore ر = -5$ (مرفوض) أ، $ر = 1$

$\therefore {}^{ن}ق_{7ر+2} = {}^{10}ق_{7(1)+2} = {}^{10}ق_{9} =$

③ ∵ $^{ن+م}ل_{٢} = ١٨٢ = {}^{١٤}ل_{٢}$
∴ م + ن = ١٤
، $^{ن-١}ق_{م} = ٨٤$
∴ $^{ن-١}ل_{٣} = ٨٤ \times ٣! = ٥٠٤ = {}^{٩}ل_{٣}$
∴ ن − ١ = ٩   ∴ ن = ١٠
∴ م + ١٠ = ١٤   ∴ م = ٤

④ ∵ $ن! = ٧٢٠ = ٦!$ ∴ ن = ٦
∴ $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$
∴ $\frac{٨ - ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٣ر = ٤٠ − ٥ر
∴ ٨ر = ٤٠   ∴ ر = ٥
∴ $^{ر+٢}ق_{ر-٢} = {}^{٧}ق_{٣} = ٣٥$

⑤ ∵ $^{ن}ل_{ر-١} = ٨٤٠ = {}^{٧}ل_{٤}$
∴ ر − ١ = ٤   ∴ ر = ٥
∴ $\frac{^{ن-٢}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر}} = \frac{(ن-٢)!}{(ن-٧)!} \times \frac{(ن-٥)!}{ن!} = \frac{١}{٤٢}$
$= \frac{(ن-٧)!}{(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)!} = \frac{١}{٤٢}$
∴ (ن − ٥)(ن − ٦) = ٦ × ٧
∴ ن = ١٢

⑥ ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٢١٠$
∴ $ر! = \frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{٥٠٤٠}{٢١٠} = ٢٤ = ٤!$
∴ ر = ٤
∴ $^{ن}ل_{٤} = ٥٠٤٠ = {}^{١٠}ل_{٤}$
∴ ن = ١٠
∴ $^{ن+١}ق_{ر} = {}^{١٠+١}ق_{٤}$ (٤)
$= {}^{١١}ق_{٨} = ١٦٥$

⑦ ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٦}{٥}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٦}{٥}$
∴ ٦ر = ٥ن − ٥ر + ٥
∴ ١١ر − ٥ن = ٥   (١)
، ∵ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$
∴ ٢ر + ١ = ن   (٢)
بحل (١) ، (٢) : ∴ ن = ٢١ ، ر = ١٠

⑧ ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٣}{٢}$
∴ $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٣}{٢}$
∴ ٢ن − ٢ر = ٣ر + ٣
∴ ٢ن − ٥ر = ٣   (١)
، ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر-١}}{^{ن}ق_{ر-٢}} = ٤$ ∴ $\frac{ن - (ر - ١) + ١}{ر - ١} = ٤$
∴ $\frac{ن - ر + ٢}{ر - ١} = ٤$
∴ ن − ر + ٢ = ٤ر − ٤
∴ ن − ٥ر = −٦   (٢)
بحل (١) ، (٢) : ∴ ن = ٩ ، ر = ٣

⑨ ∵ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-١}$
∴ ر + ر − ١ = ن   ∴ ن = ٢ر − ١
، ∵ $^{ن+١}ق_{ر} = \frac{٤٠}{ر!} \times {}^{ن}ل_{ر-٢}$
∴ $^{٢ر}ق_{ر} = \frac{٤٠}{ر!} \times {}^{٢ر-١}ل_{ر-٢}$
∴ $\frac{٢ر!}{ر!\, ر!} = \frac{٤٠}{ر!} \times \frac{(٢ر-١)!}{(ر+١)!}$
∴ $\frac{(٢ر)\,(٢ر-١)!}{ر!\, ر!} = \frac{٤٠\,(٢ر-١)!}{ر! \times (ر+١)!}$
∴ $٢ر = \frac{٤٠}{ر + ١}$ ∴ (٢ر)(ر + ١) = ٤٠
∴ $٢ر^{٢} + ٢ر - ٤٠ = ٠$
∴ $ر^{٢} + ر - ٢٠ = ٠$
∴ (ر + ٥)(ر − ٤) = ٠
∴ ر = −٥ (مرفوض) أو ر = ٤ ومنها ن = ٧

⑩ ∵ $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{ر+٣}$
∴ ر = $\frac{٣}{٢}$ (مرفوض) أو ر + ر + ٣ = ١٥
∴ ٢ر = ١٢   ∴ ر = ٦
∵ $\frac{^{ن+٢}ق_{٨}}{^{ن+٢}ل_{٦}} = \frac{٣}{٤٠}$
∴ $\frac{(ن+٢)!}{٨!\,(ن-٦)!} \times \frac{(ن-٤)!}{(ن+٢)!} = \frac{٣}{٤٠}$
∴ $\frac{(ن-٤)(ن-٥)}{٨!} = \frac{٣}{٤٠}$
∴ $^{ن+٢}ل_{٤} = \frac{٣}{٤٠} \times ٨! = ٣٠٢٤ = {}^{٩}ل_{٤}$
∴ ن + ٢ = ٩   ∴ ن = ٧
∴ $^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر}$
$= \frac{٧ - ٤ + ١}{٤} = ١$

⑪ ∵ $^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$
∴ $\frac{٦!}{(٦-ر)!} = ٤ \times \frac{٦!}{(٧-ر)!}$
∴ (٧ − ر)(٦ − ر)! = ٤ (٦ − ر)!
∴ ٧ − ر = ٤   ∴ ر = ٣
∴ $(ن-٣)! = ٦ = ٣!$ ∴ ن − ٣ = ٣
∴ ن = ٦

⑫ ∵ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ق_{ر}} = ٢$ ∴ $ر! = ٢ = ٢!$
∴ ر = ٢
∴ $\frac{^{ن}ق_{٢}}{^{ن}ق_{١}} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $\frac{ن - ٢ + ١}{٢} = \frac{٥}{٣}$
∴ ن − ٢ = ٥   ∴ ن = ٧

⑬ ∵ $(ن-٣)! = ١٢٠ = ٥!$
∴ ن − ٣ = ٥   ∴ ن = ٨
∴ $٤ \times {}^{٨}ق_{ر} = ٩ \times {}^{٨}ق_{ر+١}$
∴ $٤ \times \frac{٨!}{ر!\,(٨-ر)!} = ٩ \times \frac{٨!}{(ر+١)!\,(٧-ر)!}$
∴ $٤ \times \frac{٨!}{ر!\,(٨-ر)!} = ٩ \times \frac{٨!}{(ر+١)\,ر!\,(٨-ر)!}$
∴ ٤ = ر + ١   ∴ ر = ٣
∴ $^{ن}ل_{ر} = {}^{٨}ل_{٣}$ ، $ر! = ٣! = ٦$

⑭ ∵ $\frac{(ن+٢)!}{ن!} + ٣ن = ٧٤$
∴ $\frac{(ن+٢)(ن+١)\,ن!}{ن!} + ٣ن = ٧٤$
∴ (ن + ٢)(ن + ١) + ٣ن = ٧٤
∴ $ن^{٢} + ٣ن + ٢ + ٣ن = ٧٤$
∴ $ن^{٢} + ٦ن - ٧٢ = ٠$
∴ (ن + ١٢)(ن − ٦) = ٠
∴ ن = −١٢ (مرفوض) أو ن = ٦
∴ $ر! = ٦ = ٣!$ ∴ ر = ٣
∴ $^{ن}ق_{ر} = {}^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

⑮ ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٥}{٧}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٥}{٧}$
∴ ٧ن − ٧ر + ٧ = ٥ر
∴ ٧ن − ١٢ر = −٧   (١)
، ∵ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-١}} = ٥$
∴ $\frac{ن!}{(ن-ر)!} \times \frac{(ن-ر+١)!}{ن!} = ٥$
∴ $\frac{(ن-ر+١)\,(ن-ر)!}{(ن-ر)!} = ٥$
∴ ن − ر + ١ = ٥   ∴ ن − ر = ٤   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢)
∴ ر = $\frac{٣١}{١١}$ (مرفوض)

، من (١) : ٢ × ٣ + ٦ = ن
∴ ن = ١٢

⑯ ∵ $\frac{^{ن+١}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر}} = ٧$
∴ $\frac{(ن+١)!}{(ن-ر+١)!} \times \frac{(ن-ر)!}{ن!} = ٧$
∴ $\frac{(ن+١)\,ن!}{ن!} = ٧$
∴ ن + ١ = ٧   ∴ ن = ٦
∴ $\frac{^{٦}ق_{ر}}{^{٦}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $\frac{٦ - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٤}$
∴ $\frac{٧ - ر}{ر} = \frac{٣}{٤}$ ∴ ٢٨ − ٤ر = ٣ر
∴ ٢٨ = ٧ر   ∴ ر = ٤
∴ $(ن - ر - ٢)! = (٦ - ٤ - ٢)! = ٠! = ١$

⑰ ∵ $\frac{^{١٣}ق_{ر+١}}{^{١٣}ق_{ر}} = \frac{٥}{٩}$
∴ $\frac{١٣ - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٥}{٩}$
∴ $\frac{١٣ - ر}{ر + ١} = \frac{٥}{٩}$
∴ ٥ر + ٥ = ١١٧ − ٩ر
∴ ١٤ر = ١١٢   ∴ ر = ٨
∵ $^{ن}ق_{٨} + {}^{ن}ق_{٧} = ٣٤٣٢$
∴ $^{ن+١}ق_{٨} = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_{٨}$
∴ ن + ١ = ١٤   ∴ ن = ١٣

⑱ ∵ $\frac{^{ر+١}ل_{ر+١}}{^{ر+١}ق_{ر+١}} = (ر+١)! = ٧٢٠ = ٦!$
∴ ر + ١ = ٦   ∴ ر = ٥
∴ $^{ن}ق_{٥} + {}^{ن}ق_{٦} = {}^{ن+١}ق_{٦} = ٥٦ = {}^{٨}ق_{٥}$
∴ ن + ١ = ٨   ∴ ن = ٧

⑲ ∵ $\frac{^{١٠}ق_{س}}{^{١٠}ق_{س-١}} = \frac{١}{٢}$
∴ $\frac{س - ص}{ص + ١} = \frac{١}{٢}$
∴ ٢س − ٢ص = ص + ١
∴ ٢س − ٣ص = ١   (١)
، ∵ $^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-١}$
∴ ص + ص − ١ = س
∴ ٢ص − س = ١   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ س = ٥ ، ص = ٣

⑳ ∵ $^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠ = {}^{٦}ل_{٤}$
∴ س + ص = ٦   (١)
∵ $(٢س + ص)! = ٥٠٤٠ = ٧!$
∴ ٢س + ص = ٧   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ س = ١ ، ص = ٥
∴ $^{ص}ق_{٢س} = {}^{٥}ق_{٢} = ١٠$

٨

① ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٣}{٢}$
∴ $\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} = \frac{٣}{٢}$
∴ $\frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} = \frac{٣}{٢}$
∴ ٢ن − ٢ر − ٢ = ٣ر + ٦
∴ ٢ن − ٥ر = ٨   (١)
، ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢}{١}$
∴ $\frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٢}{١}$ ∴ $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٢}{١}$
∴ ن − ر = ٢ر + ٢
∴ ن − ٣ر = ٢   (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ ن = ١٤ ، ر = ٤

② ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢٤}{١٥}$ ∴ $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٨}{٥}$
∴ ٥ن − ٥ر = ٨ر + ٨
∴ ٥ن − ١٣ر = ٨   (١)
، ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٢٨}{٢٤}$
∴ $\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} = \frac{٧}{٦}$
∴ $\frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} = \frac{٧}{٦}$
∴ ٦ن − ٦ر − ٦ = ٧ر + ١٤
∴ ٦ن − ١٣ر = ٢٠   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ ن = ١٢ ، ر = ٤

③ ∵ $^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن}ق_{ر+٤}$
∴ ر + ٢ + ر + ٤ = ن
∴ ٢ر + ٦ = ن   (١)
، ∵ $\frac{^{ن+٢}ق_{ر+١}}{^{ن+٢}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$ ∴ $\frac{ن + ٢ - ر}{ر + ١} = \frac{١٤}{٣}$
∴ $\frac{(ر+٢)(ر+١)!}{...} \times \frac{...}{...} = \frac{١٤}{٣}$
∴ $\frac{(ر+٦)(ر+١)(ر+١)!}{...} = \frac{١٤}{٣}$
∴ $\frac{ر^{٢} + ١١ر + ٣٠}{ر^{٢} + ٣ر + ٢} = \frac{١٤}{٣}$
∴ $١٤ر^{٢} + ٤٢ر + ٢٨ = ٣ر^{٢} + ٣٣ر + ٩٠$
∴ $١١ر^{٢} + ٩ر - ٦٢ = ٠$
∴ (١١ر + ٣١)(ر − ٢) = ٠

④ ∵ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٧}{٤}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٤}$
∴ ٤ن − ٤ر + ٤ = ٧ر
∴ ٤ن − ١١ر = −٤   (١)
، ∵ $\frac{^{ن}ل_{ر-١}}{^{ن}ق_{ر-١} \times ...} = \frac{٤}{٦}$
$= \frac{ن!}{(ن-ر+١)!\,(ر-١)!} \times \frac{(ن-ر)!\,...}{ن!}$
∴ $\frac{ن}{٥\,(ر - ١)} = \frac{٣}{٢}$
∴ ٢ن = ١٥ر − ١٥ ...
∴ ٣ن − ١٠ر = ١٠٠   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ ن = ١٠ ، ر = ٤
∴ $\frac{(ن-١)!}{(ر!)} = \frac{٩!}{(٤!)^{...}} = \frac{...}{...}$

٩

① ∵ $^{س+٢}ل_{٣} = ٤٢$ س
∴ (س + ٢)(س + ١)(س) = ٤٢ س
∵ س ≠ ٠
∴ (س + ٢)(س + ١) = ٤٢ = ٧ × ٦
∴ س + ٢ = ٧   ∴ س = ٥

② ∵ ٣٠ |س = |س + ٢
∴ ٣٠ |س = (س + ٢) (س + ١) |س
∴ (س + ٢) (س + ١) = ٦ × ٥
∴ س + ٢ = ٦   ∴ س = ٤
③ ∵ $^{٧}ل_{س}$ − س × $^{٧}ل_{س-١}$ = ٠
∴ $^{٧}ل_{س}$ = س $^{٧}ل_{س-١}$
∴ |٧ / |٧ − س = س × |٧ / |٨ − س
∴ |٨ − س = س |٧ − س
∴ (٨ − س) |٧ − س = س |٧ − س
∴ ٨ − س = س   ∴ ٢ س = ٨
∴ س = ٤
④ ∵ ٣٠ × $^{س+٢}ل_{٢}$ = $^{س+٥}ل_{٥}$
∴ ٣٠ |س + ٢ / |س = |س + ٥ / |س
∴ ٣٠ |س + ٢ = (س + ٥) (س + ٤) |س + ٣
∴ (س + ٥) (س + ٤) = ٦ × ٥
∴ س + ٥ = ٦   ∴ س = ١
⑤ ∵ |س + ٢ = ١٨٢ × |س / |س − ١١ × |س − ١١
∴ (س + ٢) (س + ١) |س = ١٨٢ |س
∴ (س + ٢) (س + ١) = ١٤ × ١٣
∴ س + ١ = ١٣   ∴ س = ١٢
⑥ ∵ ($^{ن}ق_{٥}$ + $^{ن}ق_{٦}$) + ($^{ن}ق_{٦}$ + $^{ن}ق_{٧}$) = ١٢٠
∴ $^{ن+١}ق_{٦}$ + $^{ن+١}ق_{٧}$ = $^{ن+٢}ق_{٧}$
= ١٢٠ = $^{١٠}ق_{٧}$
∴ ن + ٢ = ١٠   ∴ ن = ٨
⑦ ∵ ٢ × $^{ن}ق_{٤}$ + ٢٢ $^{ن}ق_{٢}$ = ١١ $^{ن}ق_{٣}$
∴ ٢ $^{ن}ق_{٤}$ / $^{ن}ق_{٣}$ + ٢٢ $^{ن}ق_{٢}$ / $^{ن}ق_{٣}$ = ١١
∴ ٢ (ن − ٤ + ١) / ٤ + ٢٢ (٣) / (ن − ٣ + ١) = ١١
∴ (ن − ٣) / ٢ + ٦٦ / (ن − ٢) = ١١
∴ ((ن − ٣) (ن − ٢) + ٦٦ (٢)) / ٢ (ن − ٢) = ١١
∴ $ن^{٢}$ − ٥ ن + ٦ + ١٣٢ = ٢٢ ن − ٤٤
∴ $ن^{٢}$ − ٢٧ ن + ١٨٢ = ٠
∴ (ن − ١٣) (ن − ١٤) = ٠
∴ ن = ١٣ أ، ن = ١٤
⑧ ∵ ن (ن − ١) (ن − ٢) / (٣ × ٢ × ١) − ن (ن − ١) / (٢ × ١)
= ١/٦ $ن^{٣}$ − $ن^{٢}$ + ٥ (بالضرب × ٦)
∴ ن (ن − ١) (ن − ٢) − ٣ ن (ن − ١)
= $ن^{٣}$ − ٦ $ن^{٢}$ + ٣٠
∴ ن ($ن^{٢}$ − ٣ ن + ٢) − (٣ $ن^{٢}$ − ٣ ن)
= $ن^{٣}$ − ٦ $ن^{٢}$ + ٣٠
∴ $ن^{٣}$ − ٣ $ن^{٢}$ + ٢ ن − ٣ $ن^{٢}$ + ٣ ن
= $ن^{٣}$ − ٦ $ن^{٢}$ + ٣٠
∴ ٥ ن = ٣٠   ∴ ن = ٦
⑨ ∵ ٥ |ن / ٥ |٤ |ن − ٥ = ٢٨٠
∴ ٥ |ن / |٥ |ن − ٥ = ٥ $^{ن}ق_{٥}$ = ٢٨٠
∴ $^{ن}ق_{٥}$ = ٥٦ = $^{٨}ق_{٥}$ ∴ ن = ٨
⑩ ∵ |ن + ١ / |ن − ٩ ÷ |ن / |ن − ٩ = |ن + ١ / |ن = (ن + ١) |ن / |ن
∴ ن + ١ = ١١   ∴ ن = ١٠
⑪ ∵ |٢ ن − ٤ / |ن − ٤ = |ن + ٢ / |٢
∴ $^{٢ن-٤}ل_{ن}$ = $^{ن+٢}ل_{ن}$
∴ ٢ ن − ٤ = ن + ٢   ∴ ن = ٦

⑫ ∵ ٢ |٢ ن = (ن + ٢) (ن + ١) $(|ن)^{٢}$
∴ |٢ ن / |ن = (ن + ٢) (ن + ١) |ن / |٢ = |ن + ٢ / |٢
∴ $^{٢ن}ل_{ن}$ = $^{ن+٢}ل_{ن}$
∴ ٢ ن = ن + ٢   ∴ ن = ٢ أ، ن = صفر
⑬ ∵ ١ / |ن + ١ / |ن + ١ = ٩ / |ن + ٢
(بالضرب × |ن + ٢)
∴ |ن + ٢ / |ن + |ن + ٢ / |ن + ١ = ٩
∴ (ن + ٢) (ن + ١) |ن / |ن + (ن + ٢) |ن + ١ / |ن + ١ = ٩
∴ $ن^{٢}$ + ٣ ن + ٢ + ن + ٢ = ٩
∴ $ن^{٢}$ + ٤ ن − ٥ = ٠
∴ (ن + ٥) (ن − ١) = ٠
∴ ن = −٥ (مرفوض) أ، ن = ١
⑭ ∵ |ن + ١ / (ن + ٢) |ن + ١ + |ن / (ن + ١) |ن = ١٣ / ٤٢
∴ ١ / (ن + ٢) + ١ / (ن + ١) = ١٣ / ٤٢
∴ ((ن + ١) + (ن + ٢)) / (ن + ٢) (ن + ١) = ١٣ / ٤٢
∴ (ن + ١ + ن + ٢) / ($ن^{٢}$ + ٣ ن + ٢) = ١٣ / ٤٢
∴ ٤٢ (٢ ن + ٣) = ١٣ ($ن^{٢}$ + ٣ ن + ٢)
∴ ٨٤ ن + ١٢٦ = ١٣ $ن^{٢}$ + ٣٩ ن + ٢٦
∴ ١٣ $ن^{٢}$ − ٤٥ ن − ١٠٠ = ٠
∴ (ن − ٥) (١٣ ن + ٢٠) = ٠
∴ ن = ٥ أ، ن = −٢٠ / ١٣ (مرفوض)
⑮ ∵ |ن + ٢ |٢ ن − ٤ = |ن |٢ ن − ٢
∴ |ن + ٢ / |ن = |٢ ن − ٢ / |٢ ن − ٤
∴ $^{ن+٢}ل_{٢}$ = $^{٢ن-٢}ل_{٢}$
∴ ن + ٢ = ٢ ن − ٢
∴ ٢ ن = ٤   ∴ ن = ٢
⑯ ∵ |٢ ن |ن − ٣ = ٧٢ |٣ ن − ٧
بضرب الطرفين × (٣ ن − ٦)
∴ |٢ ن |ن − ٣ × ٣ (ن − ٢)
= ٧٢ |٣ ن − ٧ × (٣ ن − ٦)
∴ ٣ |٢ ن |ن − ٢ = ٧٢ |٣ ن − ٦
∴ |٢ ن |ن − ٢ = ٢٤ |٣ ن − ٦
∴ |٢ ن |ن − ٢ = |٤ |٣ ن − ٦
∴ |٢ ن / |٤ = |٣ ن − ٦ / |ن − ٢
∴ $^{٢ن}ل_{٢ن-٤}$ = $^{٣ن-٦}ل_{٢ن-٤}$
∴ ٢ ن = ٣ ن − ٦   ∴ ن = ٦

١٠

① العامل الأوسط = (ن − ٣) = ٩
∴ ن = ١٢   ∴ $س^{٢}$ − ١٢ = ٤
∴ $س^{٢}$ = ١٦
∴ س = ٤ (ويرفض الحل السالب)
∴ |س = |٤ = ٢٤
② ∵ ٤ $^{ن}ق_{٥}$، ٣ $^{ن}ق_{٦}$، ٣ $^{ن}ق_{٧}$ متتابعة حسابية
∴ ٦ $^{ن}ق_{٦}$ = ٤ $^{ن}ق_{٥}$ + ٣ $^{ن}ق_{٧}$
∴ ٦ = ٤ $^{ن}ق_{٥}$ / $^{ن}ق_{٦}$ + ٣ $^{ن}ق_{٧}$ / $^{ن}ق_{٦}$
∴ ٦ = ٤ (٦ / (ن − ٦ + ١)) + ٣ ((ن − ٧ + ١) / ٧)
∴ ٦ = ٢٤ / (ن − ٥) + (٣ ن − ١٨) / ٧
∴ ٦ = (٢٤ × ٧ + (٣ ن − ١٨) (ن − ٥)) / ٧ (ن − ٥)
∴ ٤٢ (ن − ٥) = ١٦٨ + ٣ $ن^{٢}$ − ٣٣ ن + ٩٠
∴ ٤٢ ن − ٢١٠ = ٣ $ن^{٢}$ − ٣٣ ن + ٢٥٨
∴ ٣ $ن^{٢}$ − ٧٥ ن + ٤٦٨ = ٠ (وبالقسمة على ٣)
∴ $ن^{٢}$ − ٢٥ ن + ١٥٦ = ٠
∴ (ن − ١٢) (ن − ١٣) = ٠
∴ ن = ١٢ أ، ن = ١٣
③ ∵ ٢ $^{١٤}ق_{ر+١}$، ٣ $^{١٤}ق_{ر}$، ٦ $^{١٤}ق_{ر-١}$ متتابعة هندسية
∴ ٢ $^{١٤}ق_{ر+١}$ / ٣ $^{١٤}ق_{ر}$ = ٣ $^{١٤}ق_{ر}$ / ٦ $^{١٤}ق_{ر-١}$
∴ ٢/٣ ((١٤ − (ر + ١) + ١) / (ر + ١)) = ١/٢ ((١٤ − ر + ١) / ر)
∴ ٢/٣ ((١٤ − ر) / (ر + ١)) = ١/٢ ((١٥ − ر) / ر)
∴ (٢٨ − ٢ ر) / (٣ ر + ٣) = (١٥ − ر) / ٢ ر
∴ ٥٦ ر − ٤ $ر^{٢}$ = −٣ $ر^{٢}$ + ٤٢ ر + ٤٥
∴ $ر^{٢}$ − ١٤ ر + ٤٥ = ٠
∴ (ر − ٩) (ر − ٥) = ٠
∴ ر = ٩ أ، ر = ٥
④ $^{ن+م}ل_{٣}$ = ٩٩٠ = $^{١١}ل_{٣}$
∴ ن + م = ١١ (١)
، $^{٢ن-م}ل_{٢}$ = ٧٢ = $^{٩}ل_{٢}$ ∴ ٢ ن − م = ٩ (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ن = ٥ ، م = ٦
∴ |م − ن = |٦ − ٥ = ١ ، $^{ن}ل_{١}$ = $^{٥}ل_{١}$ = ٥
، ٥/٢٢ $^{ن+م}ل_{٢}$ = ٥/٢٢ × $^{١١}ل_{٢}$ = ٢٥
∴ ٢٥/٥ = ٥/١
∴ |م − ن ، $^{ن}ل_{١}$ ، ٥/٢٢ $^{ن+م}ل_{٢}$ فى تتابع هندسى
⑤ ∵ $^{ص+١}ل_{٢}$ = س
∴ أصغر قيمة لـ س = $^{٣}ل_{٢}$ = ٦
∵ [illegible] = ص
∴ أصغر قيمة لـ ص = $^{٢}ل_{٢}$ = ٢
∴ أقل قيمة للمقدار |س + ص = |٦ + ٢ = ٤٠٣٢٠
أما أقل قيمة للمقدار |س − ص تتحقق عندما تكون
س = $^{٣}ل_{٢}$ = ٦ ، ص = $^{٣}ل_{٢}$ = ٦
∴ أقل قيمة للمقدار |س − ص = |٦ − ٦ = |٠ = ١

١١

① $^{ن}ق_{ر}$ / $^{ن-١}ق_{ر-١}$ = |ن / |ن − ر |ر × |ن − ر |ر − ١ / |ن − ١
= ن |ن − ١ / ر |ر − ١ × |ر − ١ / |ن − ١ = ن / ر
(١) ∵ ($^{٢٤}ق_{٣}$ + $^{٢٥}ق_{٤}$) / ($^{٢٣}ق_{٢}$ + $^{٢٤}ق_{٣}$)
= (١ + $^{٢٥}ق_{٤}$ / $^{٢٤}ق_{٣}$) / ($^{٢٣}ق_{٢}$ / $^{٢٤}ق_{٣}$ + ١) = (١ + ٢٥/٤) / (٣/٢٤ + ١) = (٢٩/٤) / (٩/٨) = ٥٨/٩
(٢) ∵ $^{ن+٢}ق_{ر+١}$ = ٩ $^{ن+١}ق_{ر}$
∴ $^{ن+٢}ق_{ر+١}$ / $^{ن+١}ق_{ر}$ = ٩   ∴ (ن + ٢) / (ر + ١) = ٩
∴ ن + ٢ = ٩ ر + ٩
∴ ن − ٩ ر = ٧ (١)
∵ ٩ $^{ن+١}ق_{ر}$ = ٩٠ $^{ن}ق_{ر-١}$
∴ $^{ن+١}ق_{ر}$ / $^{ن}ق_{ر-١}$ = (ن + ١) / ر = ٩٠/٩ = ١٠
∴ ن + ١ = ١٠ ر
∴ ن − ١٠ ر = −١ (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ ن = ٧٩ ، ر = ٨

② $^{ن}ق_{ر}$ / $^{ن-١}ق_{ر}$ = |ن / |ن − ر |ر × |ن − ر − ١ |ر / |ن − ١
= ن |ن − ١ / (ن − ر) |ن − ر − ١ × |ن − ر − ١ / |ن − ١
= ن / (ن − ر)
∴ ($^{ن}ق_{٨}$ + $^{ن-١}ق_{٨}$) / $^{ن-١}ق_{٨}$ = $^{ن}ق_{٨}$ / $^{ن-١}ق_{٨}$ + $^{ن-١}ق_{٨}$ / $^{ن-١}ق_{٨}$
= ن / (ن − ٨) + ١ = ٣
∴ ن / (ن − ٨) = ٢   ∴ ن = ٢ ن − ١٦   ∴ ن = ١٦
③ ($^{ن}ق_{ر}$ + $^{ن}ق_{ر+١}$) / $^{ن}ق_{ر}$ = $^{ن+١}ق_{ر+١}$ / $^{ن}ق_{ر}$
= |ن + ١ / |ن − ر |ر + ١ × |ن − ر |ر / |ن
= (ن + ١) |ن / (ر + ١) |ر × |ر / |ن = (ن + ١) / (ر + ١)
∴ ($^{ن}ق_{٨}$ + $^{ن}ق_{٩}$) / $^{ن}ق_{٨}$ = (ن + ١) / ٩ = ٧/٣
∴ ٣ ن + ٣ = ٦٣   ∴ ٣ ن = ٦٠   ∴ ن = ٢٠
④ الطرف الأيمن = (ن × (٢ ن (٢ ن − ١) / (٢ × ١))) / (٣ ن (٣ ن − ١) (٣ ن − ٢) / (٣ × ٢ × ١))
= ن (٢ ن) (٢ ن − ١) / (٢ × ١)
× (٣ × ٢ × ١) / ٣ ن (٣ ن − ١) (٣ ن − ٢)
= ٢ ن (٢ ن − ١) / (٣ ن − ١) (٣ ن − ٢) = $^{٢ن}ل_{٢}$ / $^{٣ن-١}ل_{٢}$
= الطرف الأيسر.

⑤ $^{ن+١}ق_{ر+١}$ / $^{ن-١}ق_{ر+١}$
= |ن + ١ / |ن − ر |ر + ١ × |ن − ر − ٢ |ر + ١ / |ن − ١
= (ن + ١) (ن) |ن − ١ / (ن − ر) (ن − ر − ١) |ن − ر − ٢
× |ن − ر − ٢ / |ن − ١ = ن (ن + ١) / (ن − ر) (ن − ر − ١)
∴ $^{١٨}ق_{٦}$ / $^{١٦}ق_{٦}$ = ١٧ (١٨) / (١٧ − ٥) (١٧ − ٥ − ١) = ٥١/٢٢
⑥ ($^{ن}ق_{ر}$ + $^{ن}ق_{ر+١}$) + ($^{ن}ق_{ر+١}$ + $^{ن}ق_{ر+٢}$)
= $^{ن+١}ق_{ر+١}$ + $^{ن+١}ق_{ر+٢}$ = $^{ن+٢}ق_{ر+٢}$
∴ $^{١٠}ق_{٥}$ + ٢ × $^{١٠}ق_{٦}$ + $^{١٠}ق_{٧}$ = $^{١٢}ق_{٧}$ = ٧٩٢
⑦ ∵ $^{ن}ل_{ر}$ / $^{ن-١}ل_{ر-١}$ = |ن / |ن − ر × |ن − ر / |ن − ١ = |ن / |ن − ١
= ن |ن − ١ / |ن − ١ = ن
∴ $^{٩٧}ل_{٤٠}$ / $^{٩٦}ل_{٣٩}$ = ٩٧
⑧ الطرف الأيمن
= ١ / |ن − ١ / (ن + ١) |ن + ١ / (ن + ٢) (ن + ١) |ن
= (ن + ٢) (ن + ١) / (ن + ٢) (ن + ١) |ن − (ن + ٢) / (ن + ٢) (ن + ١) |ن
+ ١ / (ن + ٢) (ن + ١) |ن
= ($ن^{٢}$ + ٣ ن + ٢ − ن − ٢ + ١) / (ن + ٢) (ن + ١) |ن
= ($ن^{٢}$ + ٢ ن + ١) / (ن + ٢) (ن + ١) |ن
= $(ن + ١)^{٢}$ / (ن + ٢) (ن + ١) |ن = (ن + ١) / (ن + ٢) |ن
= الطرف الأيسر.

⑨ الطرف الأيمن

$= |\underline{٢ن} = ٢ن(٢ن-١)(٢ن-٢)\times(٢ن-٣)$

$\times ... \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

∴ $|\underline{٢ن} = [٢ \times ٤ \times ٦ \times ... \times ٢ن]$

$\times [١ \times ٣ \times ٥ \times ... (٢ن-١)]$

∴ $|\underline{٢ن} = ٢^{ن}[١ \times ٢ \times ٣ \times ... \times ن]$

$\times [١ \times ٣ \times ٥ \times ... (٢ن-١)]$

∴ $|\underline{٢ن} = ٢^{ن} |\underline{ن} [١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times (٢ن-١)]$

⑩ الطرف الأيمن

$= \frac{|\underline{ن-ر-١}}{|\underline{ر}\,|\underline{ن-١}} \times (\frac{ن}{ن}) - \frac{|\underline{ن-ر-١}}{|\underline{ر-١}\,|\underline{ن}} \times (\frac{ر}{ر})$

$= \frac{ن|\underline{ن-ر-١}}{|\underline{ر}\,|\underline{ن}} - \frac{ر|\underline{ن-ر-١}}{|\underline{ر}\,|\underline{ن}}$

$= \frac{|\underline{ن-ر-١}\,(ن-ر)}{|\underline{ن}\,|\underline{ر}} = \frac{|\underline{ن-ر}}{|\underline{ن}\,|\underline{ر}}$

١٢

نفرض أن الأعداد هي ن ، ن - ١ ، ن - ٢ ، .... ، ن - ر + ١

∴ حاصل الضرب = ن (ن - ١) (ن - ٢) ....

$(ن - ر + ١) = {}^{ن}ل_{ر}$

، ∵ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}} = {}^{ن}ق_{ر}$ ، ∵ $^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$

∴ $^{ن}ل_{ر}$ يقبل القسمة على $|\underline{ر}$

١٣

∵ $^{ن}ق_{ر+٢} \le {}^{ن}ق_{ر+١}$ ∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} \le ١$

∴ $\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} \le ١$

∴ $ن - ر - ١ \le ر + ٢$ ∴ $ن \le ٢ر + ٣$

١٤

∵ $^{ن}ق_{ر+٢} \times {}^{ن}ق_{ر} \le {}^{ن}ق_{ر+١} \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} \le ١$

∴ $(\frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢})(\frac{ن - ر + ١}{ر}) \le ١$

∴ $\frac{(ن - ر - ١)(ن - ر + ١)}{ر^٢ + ٢ر} \le ١$

∴ $(ن - ر)^٢ - ١ \le ر^٢ + ٢ر$

∴ $(ن - ر)^٢ \le ر^٢ + ٢ر + ١$

∴ $(ن - ر)^٢ \le (ر + ١)^٢$ ∴ $ن - ر \le ر + ١$

∴ $ن \le ٢ر + ١$ (لأن ن ، ر $\in ص^{+}$ ، ن $\ge$ ر)

١٥

عدد عناصر $ع_١ = {}^{ن}ق_٣$ وعدد عناصر $ع_٢ = {}^{ن}ل_٢$

∴ $^{ن}ق_٣ = {}^{ن}ل_٢$ ∴ $\frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٣}\,|\underline{٣}} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}}$

∴ $|\underline{ن-٢} = |\underline{ن-٣}\,|\underline{٣}$

∴ $(ن-٢)|\underline{ن-٣} = ٦|\underline{ن-٣}$

∴ ن - ٢ = ٦ ∴ ن = ٨

∵ $٤ك|\underline{٢ك-١} = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{^{١١}ق_٣ + {}^{١١}ق_٤}{^{١٢}ق_٣} + ٥ (٨)$

∴ $٢ \times ٢ك|\underline{٢ك-١} = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{^{١٢}ق_٤}{^{١٢}ق_٣} + ٤٠$

∴ $٢|\underline{٢ك} = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{١٢ - ٤ + ١}{٤} + ٤٠$

∴ $٢|\underline{٢ك} = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{٩}{٤} + ٤٠$

∴ $٢|\underline{٢ك} = ٤٨$ ∴ $|\underline{٢ك} = ٢٤ = |\underline{٤}$

∴ ٢ك = ٤ ∴ ك = ٢

١٦

① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (د)

إرشادات لحل رقم **١٦** :

① $\frac{|\underline{ك+٥}}{|\underline{٤}} = \frac{١١(ك-١)}{٢} \times \frac{|\underline{ك+٣}}{|\underline{٣}}$

∴ $\frac{(ك+٥)(ك+٤)|\underline{ك+٣}}{٤|\underline{٣}}$

$= \frac{١١(ك-١)}{٢} \times \frac{|\underline{ك+٣}}{|\underline{٣}}$

∴ (ك + ٥) (ك + ٤) = ٢٢ (ك - ١)

∴ $ك^٢ + ٩ك + ٢٠ - ٢٢ك + ٢٢ = ٠$

∴ $ك^٢ - ١٣ك + ٤٢ = ٠$

∴ (ك - ٧) (ك - ٦) = ٠

∴ ك = ٧ أو ك = ٦ ∴ ٦ إحدى قيم ك

② ∵ $ن = {}^{م}ق_٢ = \frac{م(م-١)}{٢}$

، $^{ن}ق_٢ = \frac{ن(ن-١)}{٢}$

$= \frac{\frac{م(م-١)}{٢}\left(\frac{م(م-١)}{٢} - ١\right)}{٢}$

$= \frac{م(م-١)}{٤}\left(\frac{م^٢ - م - ٢}{٢}\right)$

$= \frac{م(م-١)(م-٢)(م+١)}{٨}$

$= \frac{(م+١)\,م\,(م-١)(م-٢)}{٨}$

$= ٣ \times \frac{^{م+١}ل_٤}{٢٤} = ٣\,{}^{م+١}ق_٤$

③ $^{س+١}ق_٤ + {}^{س+١}ق_٣ + {}^{س+٢}ق_٣ + {}^{س+٣}ق_٣$

$+ ... + {}^{س+٦}ق_٣ = ١٣٦٥$

∴ $^{س+٧}ق_٤ = {}^{١٥}ق_٤$

∴ س + ٧ = ١٥ ∴ س = ٨

④ ك = ن (ن + ١) (ن - ١) (ن + ٢) (ن - ٢)

... (ن + ر) (ن - ر)

= (ن + ر) ..... (ن + ٢) (ن + ١) ن (ن - ١) (ن - ٢) ... (ن - ر)

(عددهم ر) (عددهم ر)

$= {}^{ن+ر}ل_{٢ر+١}$

$= {}^{ن+ر}ق_{٢ر+١} \times |\underline{٢ر+١}$

، ∵ $^{ن+ر}ق_{٢ر+١}$ عدد صحيح موجب

، $|\underline{٢ر+١}$ عدد صحيح موجب

∴ ك تقبل القسمة على $|\underline{٢ر+١}$

⑤ أ = أقصى قيم $^{١٩}ق_{س} = {}^{١٩}ق_{١٠} = {}^{١٩}ق_{٩}$ ،

، ب = أقصى قيم $^{٢٠}ق_{ص} = {}^{٢٠}ق_{١٠}$

$= \frac{|\underline{٢٠}}{|\underline{١٠}\,|\underline{١٠}} = \frac{٢٠|\underline{١٩}}{١٠|\underline{٩}\,|\underline{١٠}} = ٢\,{}^{١٩}ق_٩$ ،

، جـ = أقصى قيم $^{٢١}ق_{ع} = {}^{٢١}ق_{١٠} = {}^{٢١}ق_{١١}$

$= \frac{٢١ \times ٢٠ \times |\underline{١٩}}{١١ \times ١٠|\underline{٩}\,|\underline{١٠}} = \frac{٤٢}{١١}\,{}^{١٩}ق_٩$ ،

∴ أ : ب : جـ = $^{١٩}ق_٩ : ٢\,{}^{١٩}ق_٩ : \frac{٤٢}{١١}\,{}^{١٩}ق_٩$ ،

$= ١ : ٢ : \frac{٤٢}{١١} = ١١ : ٢٢ : ٤٢$

١٧

① ∵ $\frac{|\underline{أ+ب+جـ}}{|\underline{أ}\,|\underline{ب}\,|\underline{جـ}}$

$= \frac{|\underline{أ+ب+جـ}}{|\underline{أ}\,|\underline{(ب+جـ)}} \cdot \frac{|\underline{(ب+جـ)}}{|\underline{ب}\,|\underline{جـ}}$

$= {}^{أ+ب+جـ}ق_{أ} \cdot {}^{ب+جـ}ق_{ب}$

∵ $^{أ+ب+جـ}ق_{أ}$ ، $^{ب+جـ}ق_{ب}$ أعداد صحيحة

∴ $^{أ+ب+جـ}ق_{أ} \times {}^{ب+جـ}ق_{ب}$ عدد صحيح

∴ $\frac{|\underline{أ+ب+جـ}}{|\underline{أ}\,|\underline{ب}\,|\underline{جـ}}$ عدد صحيح

∴ $|\underline{أ+ب+جـ}$ يقبل القسمة على $|\underline{أ}\,|\underline{ب}\,|\underline{جـ}$

② ∵ $\frac{^{ن}ق_١}{^{ن}ق_٠} + ٢ \times \frac{^{ن}ق_٢}{^{ن}ق_١} + ٣ \times \frac{^{ن}ق_٣}{^{ن}ق_٢} + ...$

$+ ن \times \frac{^{ن}ق_{ن}}{^{ن}ق_{ن-١}}$

$= \frac{ن - ١ + ١}{١} + ٢ \times \frac{ن - ٢ + ١}{٢} +$

$٣ \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} + ... + ن \times \frac{ن - ن + ١}{ن}$

$= \frac{ن}{١} + (ن - ١) + (ن - ٢) + ... + ١$

وفي متتابعة حسابية حدها الأول ن وحدها الأخير ١

وعدد حدودها ن

مجموعها = $\frac{ن}{٢}[ن + ١]$

③ الطرف الأيمن

$= (٢ - ١)|\underline{١} + (٣ - ١)|\underline{٢} + (٤ - ١)|\underline{٣} + ...$

$+ (ن + ١ - ١)|\underline{ن} = ٢|\underline{١} - |\underline{١} + ٣|\underline{٢} - |\underline{٢}$

$+ ٤|\underline{٣} - |\underline{٣} + ... + (ن + ١)|\underline{ن} - |\underline{ن}$

$= |\underline{٢} - |\underline{١} + |\underline{٣} - |\underline{٢} + |\underline{٤} - |\underline{٣} + ...$

$+ |\underline{ن+١} - |\underline{ن}$

$= |\underline{ن+١} - |\underline{١} = |\underline{ن+١} - ١$ = الطرف الأيسر

④ ∵ $^{٤}ق_٣ + {}^{٥}ق_٣ + {}^{٦}ق_٣ + ... + {}^{٢٠}ق_٣$

$= {}^{٤}ق_١ + {}^{٥}ق_٢ + {}^{٦}ق_٣ + ... + {}^{٢٠}ق_{١٧}$

«باستخدام القاعدة $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$»

$= ({}^{٤}ق_٠ + {}^{٤}ق_١ + {}^{٥}ق_٢ + {}^{٦}ق_٣ + ... + {}^{٢٠}ق_{١٧})$

$- ({}^{٤}ق_٠)$ «بإضافة وطرح $^{٤}ق_٠$»

$= ({}^{٥}ق_١ + {}^{٥}ق_٢ + {}^{٦}ق_٣ + ... + {}^{٢٠}ق_{١٧}) - ١$

«باستخدام قانون الجمع»

$= ({}^{٦}ق_٢ + {}^{٦}ق_٣ + ... + {}^{٢٠}ق_{١٧}) - ١$ وهكذا

$= {}^{٢١}ق_{١٧} - ١ = {}^{٢١}ق_٤ - ١$

إجابات تمارين 3

١

① $(س + ص)^٥ = {}^{٥}ق_٠ ص^٠ س^٥ + {}^{٥}ق_١ ص^١ س^٤$

$+ {}^{٥}ق_٢ ص^٢ س^٣ + {}^{٥}ق_٣ ص^٣ س^٢ + {}^{٥}ق_٤ ص^٤ س$

$+ {}^{٥}ق_٥ ص^٥ س^٠ = س^٥ + ٥ ص س^٤$

$+ ١٠ ص^٢ س^٣ + ١٠ ص^٣ س^٢$

$+ ٥ ص^٤ س + ص^٥$

② $(س - ٢)^٦ = {}^{٦}ق_٠ (٢)^٠ س^٦ - {}^{٦}ق_١ (٢) س^٥$

$+ {}^{٦}ق_٢ (٢)^٢ س^٤ - {}^{٦}ق_٣ (٢)^٣ س^٣$

$+ {}^{٦}ق_٤ (٢)^٤ س^٢ - {}^{٦}ق_٥ (٢)^٥ س$

$+ {}^{٦}ق_٦ (٢)^٦$

$= س^٦ - ١٢ س^٥ + ٦٠ س^٤ - ١٦٠ س^٣$

$+ ٢٤٠ س^٢ - ١٩٢ س + ٦٤$

③ $(٢س + ٣ص)^٤$

$= {}^{٤}ق_٠ (٣ص)^٠ (٢س)^٤ + {}^{٤}ق_١ (٣ص) (٢س)^٣$

$+ {}^{٤}ق_٢ (٣ص)^٢ (٢س)^٢ + {}^{٤}ق_٣ (٣ص)^٣ (٢س)$

$+ {}^{٤}ق_٤ (٣ص)^٤ (٢س)^٠$

$= ١٦ س^٤ + ٩٦ ص س^٣ + ٢١٦ ص^٢ س^٢$

$+ ٢١٦ ص^٣ س + ٨١ ص^٤$

④ $(١ - \sqrt{٢}س)^٦ = {}^{٦}ق_٠ (\sqrt{٢}س)^٠$

$- {}^{٦}ق_١ (\sqrt{٢}س) + {}^{٦}ق_٢ (\sqrt{٢}س)^٢$

$- {}^{٦}ق_٣ (\sqrt{٢}س)^٣ + {}^{٦}ق_٤ (\sqrt{٢}س)^٤$

$- {}^{٦}ق_٥ (\sqrt{٢}س)^٥ + {}^{٦}ق_٦ (\sqrt{٢}س)^٦$

$= ١ - ٦\sqrt{٢}س + ٣٠ س^٢$

$- ٤٠\sqrt{٢}س^٣ + ٦٠ س^٤ - ٢٤\sqrt{٢}س^٥ + ٨ س^٦$

⑤ $(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢})^٤ = {}^{٤}ق_٠ (\frac{س}{٢})^٠ (\frac{٢}{س})^٤$

$+ {}^{٤}ق_١ (\frac{س}{٢}) (\frac{٢}{س})^٣ + {}^{٤}ق_٢ (\frac{س}{٢})^٢ (\frac{٢}{س})^٢$

$+ {}^{٤}ق_٣ (\frac{س}{٢})^٣ (\frac{٢}{س}) + {}^{٤}ق_٤ (\frac{س}{٢})^٤ (\frac{٢}{س})^٠$

$= \frac{١٦}{س^٤} + \frac{١٦}{س^٢} + ٦ + س^٢ + \frac{س^٤}{١٦}$

⑥ $(س - \frac{١}{س})^٥ = {}^{٥}ق_٠ (\frac{١}{س})^٠ س^٥$

$- {}^{٥}ق_١ (\frac{١}{س}) س^٤ + {}^{٥}ق_٢ (\frac{١}{س})^٢ س^٣$

$- {}^{٥}ق_٣ (\frac{١}{س})^٣ س^٢ + {}^{٥}ق_٤ (\frac{١}{س})^٤ س$

$- {}^{٥}ق_٥ (\frac{١}{س})^٥ س^٠ = س^٥ - ٥ س^٣$

$+ ١٠ س - \frac{١٠}{س} + \frac{٥}{س^٣} - \frac{١}{س^٥}$

⑦ $(٢س^٢ - \frac{٣}{٢س})^٥$

$= {}^{٥}ق_٠ (\frac{٣}{٢س})^٠ (٢س^٢)^٥ - {}^{٥}ق_١ (\frac{٣}{٢س}) (٢س^٢)^٤$

$+ {}^{٥}ق_٢ (\frac{٣}{٢س})^٢ (٢س^٢)^٣ - {}^{٥}ق_٣ (\frac{٣}{٢س})^٣ (٢س^٢)^٢$

$+ {}^{٥}ق_٤ (\frac{٣}{٢س})^٤ (٢س^٢)$

$- {}^{٥}ق_٥ (\frac{٣}{٢س})^٥ (٢س^٢)^٠$

$= ٣٢ س^{١٠} - ١٢٠ س^٧ + ١٨٠ س^٤ - ١٣٥ س$

$+ \frac{٤٠٥}{٨ س^٢} - \frac{٢٤٣}{٣٢ س^٥}$

⑧ $(١ - س)^٥ (١ + س)^٥ = (١ - س^٢)^٥$

$= {}^{٥}ق_٠ (س^٢)^٠ - {}^{٥}ق_١ (س^٢)^١ + {}^{٥}ق_٢ (س^٢)^٢$

$- {}^{٥}ق_٣ (س^٢)^٣ + {}^{٥}ق_٤ (س^٢)^٤ - {}^{٥}ق_٥ (س^٢)^٥$

$= ١ - ٥ س^٢ + ١٠ س^٤ - ١٠ س^٦ + ٥ س^٨$

$- س^{١٠}$

⑨ $(١ + (س - \frac{١}{س}))^٣ = ١ + {}^{٣}ق_١ (س - \frac{١}{س})$

$+ {}^{٣}ق_٢ (س - \frac{١}{س})^٢ + {}^{٣}ق_٣ (س - \frac{١}{س})^٣$

$= ١ + ٣س - \frac{٣}{س} + ٣[س^٢ - ٢ + \frac{١}{س^٢}]$

$+ [س^٣ + {}^{٣}ق_١ (\frac{-١}{س}) (س)^٢$

$+ {}^{٣}ق_٢ (\frac{-١}{س})^٢ (س) + {}^{٣}ق_٣ (\frac{-١}{س})^٣]$

$= ١ + ٣س - \frac{٣}{س} + ٣س^٢ - ٦ + \frac{٣}{س^٢}$

$+ س^٣ - ٣س + \frac{٣}{س} - \frac{١}{س^٣}$

$= س^٣ + ٣س^٢ - ٥ + \frac{٣}{س^٢} - \frac{١}{س^٣}$

٢

① $(س + ٢)^٦ - (س - ٢)^٦ = ٢[ح_٢ + ح_٤ + ح_٦]$

$= ٢[{}^{٦}ق_١ (٢) س^٥ + {}^{٦}ق_٣ (٢)^٣ س^٣$

$+ {}^{٦}ق_٥ (٢)^٥ س]$

$= ٢[١٢ س^٥ + ١٦٠ س^٣ + ١٩٢ س]$

$= ٢٤ س^٥ + ٣٢٠ س^٣ + ٣٨٤ س$

② $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤$

$= ٢[ح_١ + ح_٣ + ح_٥]$

$= ٢[{}^{٤}ق_٠ (\sqrt{٢})^٠ س^٤ + {}^{٤}ق_٢ (\sqrt{٢})^٢ س^٢$

$+ {}^{٤}ق_٤ (\sqrt{٢})^٤ س^٠]$

$= ٢[س^٤ + ١٢ س^٢ + ٤]$

$= ٢ س^٤ + ٢٤ س^٢ + ٨$

③ $(١ + \sqrt{س})^٥ - (١ - \sqrt{س})^٥$

$= ٢[ح_٢ + ح_٤ + ح_٦]$

$= ٢[{}^{٥}ق_١ (\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_٣ (\sqrt{س})^٣ + {}^{٥}ق_٥ (\sqrt{س})^٥]$

$= ٢[٥\sqrt{س} + ١٠ س\sqrt{س} + س^٢\sqrt{س}]$

$= ١٠\sqrt{س} + ٢٠ س\sqrt{س} + ٢ س^٢\sqrt{س}$

، عندما س = ٣ :

∴ $(١ + \sqrt{٣})^٥ - (١ - \sqrt{٣})^٥ = ١٠\sqrt{٣}$

$+ ٢٠ (٣\sqrt{٣}) + ٢ (٣)^٢ \sqrt{٣} = ٨٨\sqrt{٣}$

④ $(\frac{(س + ١)(س^٢ - س + ١)}{(س + ١)} + س)^٤ + (س^٢ - ١)^٤$

$= (س^٢ - س + ١ + س)^٤ + (س^٢ - ١)^٤$

$= (س^٢ + ١)^٤ + (س^٢ - ١)^٤$

$= ٢[ح_١ + ح_٣ + ح_٥]$

$= ٢[{}^{٤}ق_٠ (س^٢)^٤ + {}^{٤}ق_٢ (س^٢)^٢ + {}^{٤}ق_٤ (س^٢)^٠]$

$= ٢[س^٨ + ٦ س^٤ + ١] = ٢ س^٨ + ١٢ س^٤ + ٢$

$، ع_{ن+1} = {}^{2ن}ق_ن (-س)^ن$

(٩) الحدين الاوسطين فى مفكوك $(1+س)^{2ن-1}$

هما $ع_ن$ ، $ع_{ن+1}$

$، ع_ن = {}^{2ن-1}ق_{ن-1} س^{ن-1}$

$، ع_{ن+1} = {}^{2ن-1}ق_ن س^ن$

(١٠) الحد الرابع من النهاية فى مفكوك

$س^4 (س - \frac{1}{س})^9$ هو الحد الرابع من البداية

فى مفكوك $س^4 (\frac{-1}{س} + س)^9$

$، ع_4 = (س^4)\ {}^9ق_3 س^3 (\frac{-1}{س})^6 = 84 س$

(١١) $1 + {}^{12}ق_1 س + {}^{12}ق_2 س^2 + ... + {}^{12}ق_{12} س^{12}$

$= (1+س)^{12}$ ∴ الحد الاوسط هو $ع_7$

$، ع_7 = {}^{12}ق_6 س^6 = 924 س^6$

(١٢) $(2س+1)^{10} + {}^{10}ق_1 (2س+1)^9 (س-3)$

$+ {}^{10}ق_2 (2س+1)^8 (س-3)^2 + ...$

$+ (س-3)^{10} = [(2س+1)+(س-3)]^{10}$

$= (3س-2)^{10}$

، الحد الاوسط هو $ع_6 = {}^{10}ق_5 (-2)^5 (3س)^5$

$= -1959552 س^5$

(١٣) $(3+س)^{11} - {}^{11}ق_1 (3+س)^{10} (1-2س)$

$+ {}^{11}ق_2 (3+س)^9 (1-2س)^2 - ...$

$- (1-2س)^{11} = [(3+س)-(1-2س)]^{11}$

$= (2+3س)^{11}$

$∴ ع_5 = {}^{11}ق_4 (3س)^4 (2)^7$

$= 3421440 س^4$

$+ 252 س^2 (1-س)^6 + ... + 6561 س^8$

$= [(1-س)+3س]^8 = (1+2س)^8$

$، ع_6 = {}^8ق_5 (2س)^5 = 1792 س^5$

، القيمة العددية عند $س = 1$ هى $1792 (1)^5 = 1792$

(١٥) مفكوك $(3+2س)^8 + (3-2س)^8$

$= 2[ع_1 + ع_3 + ع_5 + ع_7 + ع_9]$

∴ الحد الأوسط $= 2 ع_5 = 2 ({}^8ق_4) (2س)^4 (3)^4$

$= 181440 س^4$

٧

(١) $1 + 8 س + {}^8ق_2 س^2 + ... + س^8$

$= (1+س)^8 = 256$

∴ $1 + س = \pm 2$

∴ $1 + س = 2$ ومنها $س = 1$

أو $1 + س = -2$ ومنها $س = -3$

(٢) $(1+\sqrt{3})^6 - (1-\sqrt{3})^6 = 2[ع_2 + ع_4 + ع_6]$

$= 2[{}^6ق_1 (\sqrt{3})^1 + {}^6ق_3 (\sqrt{3})^3 + {}^6ق_5 (\sqrt{3})^5]$

$= 2[6\sqrt{3} + 60\sqrt{3} + 54\sqrt{3}] = 240\sqrt{3}$

∴ $480\sqrt{3}\ س = 240\sqrt{3}$ ∴ $س = \frac{1}{2}$

(٣) $(\frac{1}{2}س)^{10} - 10 \times 3 (\frac{1}{2}س)^9 + 45$

$\times 3^2 (\frac{1}{2}س)^8 - 120 \times 3^3 (\frac{1}{2}س)^7 + ... + 3^{10}$

$= (\frac{1}{2}س - 3)^{10}$

∴ $(\frac{1}{2}س - 3)^{10} = 1024 = (\pm 2)^{10}$

∴ $\frac{1}{2}س - 3 = \pm 2$

∴ $\frac{1}{2}س - 3 = 2$ ومنها $س = 10$

أو $\frac{1}{2}س - 3 = -2$ ومنها $س = 2$

$+ ... + س^{20} = (1+س)^{20}$

$، س^{18} + 18 س^{17} + 153 س^{16} + ... + 1$

$= (س+1)^{18}$

∴ $(1+س)^{20} = (1+س)^{18}$

∴ $(1+س)^2 = 1$ ∴ $1 + س = \pm 1$

∴ $1 + س = 1$ ومنها $س =$ صفر

أو $1 + س = -1$ ومنها $س = -2$

(٥) $(2+س)^7 + 7 س^2 (2+س)^6 + \frac{7 \times 6}{2 \times 1} س^4$

$(2+س)^5 + ... + س^{14} = ((2+س) + س^2)^7$

∴ الحدان الأوسطان هما $ع_4$ ، $ع_5$

∴ $ع_4 = {}^7ق_3 (س^2)^3 (2+س)^4$

$= {}^7ق_3 س^6 (2+س)^4$

$، ع_5 = {}^7ق_4 (س^2)^4 (2+س)^3$

$= {}^7ق_4 س^8 (2+س)^3$

∴ ${}^7ق_3 س^6 (2+س)^4 = {}^7ق_4 س^8 (2+س)^3$

∴ $2 + س = س^2$ ∴ $س^2 - س - 2 = 0$

∴ $(س-2)(س+1) = 0$

ومنها $س = 2$ أو $س = -1$

(٦) الحد الاوسط فى مفكوك $(س^2 + \frac{1}{2س})^{10}$

هو الحد السادس

∴ $ع_6 = {}^{10}ق_5 (\frac{1}{2س})^5 (س^2)^5 = \frac{63}{8} س^5$

∴ $\frac{63}{8} س^5 = \frac{28}{27}$ ∴ $س^5 = \frac{32}{243} = (\frac{2}{3})^5$

∴ $س = \frac{2}{3}$

(٧) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(\frac{2}{س} + \frac{س^2}{8})^9$

هما $ع_5$ ، $ع_6$

$، ع_5 = {}^9ق_4 (\frac{س^2}{8})^4 (\frac{2}{س})^5 = \frac{63}{64} س^7$

$، ع_6 = {}^9ق_5 (\frac{س^2}{8})^{[illegible]} (\frac{2}{س})^{[illegible]} = \frac{[illegible]}{1024} س^{[illegible]}$

∴ $\frac{63}{1024} س^{11} = \frac{63}{64} س^7$

∴ $س^4 = 16 = (\pm 2)^4$ ∴ $س = \pm 2$

(٨) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س + \frac{1}{س^2})^9$

هما $ع_5$ ، $ع_6$

، ∵ $ع_5 + ع_6 =$ صفر

∴ ${}^9ق_4 (\frac{1}{س^2})^4 (س)^5 + {}^9ق_5 (\frac{1}{س^2})^5 س^4 = 0$

∴ ${}^9ق_4 \times \frac{1}{س^3} = -{}^9ق_5 \times \frac{1}{س^6}$

∴ $\frac{{}^9ق_5}{{}^9ق_4} = -\frac{1}{س^3} \times س^6$

∴ $\frac{9 - 5 + 1}{5} = -س^3$

∴ $س^3 = -1$ ∴ $س = -1$

(٩) $ع_6 = {}^7ق_5 (\frac{1}{2})^5 (2س^2)^2$

$، ع_3 = {}^7ق_2 (\frac{1}{2})^2 (2س^2)^5$

∴ ${}^7ق_5 (\frac{1}{2})^5 (2س^2)^2 = {}^7ق_2 (\frac{1}{2})^2 (2س^2)^5$

∴ $(2س^2)^3 = (\frac{1}{2})^3$

∴ $2س^2 = \frac{1}{2}$ ∴ $س^2 = \frac{1}{4}$

∴ $س = \pm \frac{1}{2}$

(١٠) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(أس + ب)^{2ن+1}$

هما $ع_{ن+1}$ ، $ع_{ن+2}$

$، ع_{ن+1} = {}^{2ن+1}ق_ن (ب)^ن (أس)^{ن+1}$

$، ع_{ن+2} = {}^{2ن+1}ق_{ن+1} (ب)^{ن+1} (أس)^ن$

∴ ${}^{2ن+1}ق_ن (ب)^ن (أس)^{ن+1}$

$= {}^{2ن+1}ق_{ن+1} (ب)^{ن+1} (أس)^ن$

∴ $أس = ب$ ∴ $س = \frac{ب}{أ}$

(١١) الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + س)^{١٠}$

هو الحد السادس ، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \, س^٥$

، $ح_٧ = {}^{١٠}ق_٦ \, س^٦$

$\therefore {}^{١٠}ق_٥ \, س^٥ = ٢ \times {}^{١٠}ق_٦ \, س^٦$

$\therefore ٢٥٢ \, س^٥ = ٤٢٠ \, س^٦$

$\therefore س = \frac{٣}{٥}$

(١٢) $ح_٧ = {}^{٦}ق_٦ \, (-١)^٦ \, س^٦ = س^٦$

، الحد الأوسط هو الحد الرابع

، $ح_٤ = {}^{٦}ق_٣ \, (-١)^٣ \, س^٣ = -٢٠ \, س^٣$

، $ح_١ = {}^{٦}ق_٠ \, (-١)^٠ \, س^٠ = ١$

$\therefore س^٦ - ٢٠ \, س^٣ + ١ = ١٩٠$

$\therefore س^٦ - ٢٠ \, س^٣ - ١٨٩ = ٠$

$\therefore (س^٣ - ٢٧)(س^٣ + ٧) = ٠$

$\therefore س = ٣$ ، أ، $س = -\sqrt[٣]{٧}$

(١٣) $ح_٥ = {}^{٢٠}ق_٤ \, (٥ \, س)^٤ \, (٣)^{١٦}$

، $ح_٨ = {}^{٢٠}ق_٧ \, (٥ \, س)^٧ \, (٣)^{١٣}$

$\therefore \frac{{}^{٢٠}ق_٤ \, (٥ \, س)^٤ \, (٣)^{١٦}}{{}^{٢٠}ق_٧ \, (٥ \, س)^٧ \, (٣)^{١٣}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{(٣)^٣}{١٦ \, (٥ \, س)^٣} = \frac{١}{٢}$ $\therefore (٥ \, س)^٣ = \frac{٢٧}{٨}$

$\therefore ٥ \, س = \frac{٣}{٢}$ $\therefore س = \frac{٣}{١٠}$

٨

(١) الحد الأوسط فى مفكوك $\left(٣ \, س^٢ + \frac{١}{٣ \, س}\right)^٨$ هو $ح_٥$

، $ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ \left(\frac{١}{٣ \, س}\right)^٤ (٣ \, س^٢)^٤ = ٧٠ \, س^٤$

$\therefore ٧٠ \, س^٤ = ١١٢٠$ $\therefore س^٤ = ١٦$

$\therefore س = \pm ٢$

إذا كان $س = ٢$: $(٢ + س)^٥ = (٢ + ٢)^٥$

$= ١٠٢٤$

إذا كان $س = -٢$: $(٢ + س)^٥ = (٢ + (-٢))^٥$

= صفر

(٢) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٣ \, س + ٢ \, ص)^{١٣}$

هما $ح_٧$ ، $ح_٨$

، $ح_٧ = {}^{١٣}ق_٦ \, (٢ \, ص)^٦ \, (٣ \, س)^٧$

، $ح_٨ = {}^{١٣}ق_٧ \, (٢ \, ص)^٧ \, (٣ \, س)^٦$

$\therefore {}^{١٣}ق_٦ \, (٢ \, ص)^٦ \, (٣ \, س)^٧ = {}^{١٣}ق_٧ \, (٢ \, ص)^٧ \, (٣ \, س)^٦$

$\therefore ٣ \, س = ٢ \, ص$ $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

(٣) الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\frac{٢ \, س}{٣} + \frac{٣}{٢ \, س}\right)^{١٠}$

هو الحد السادس

، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{٣}{٢ \, س}\right)^٥ \left(\frac{٢ \, س}{٣}\right)^٥ = ٢٥٢$

، $ح_٣ = {}^{١٠}ق_٢ \left(\frac{٣}{٢ \, س}\right)^٢ \left(\frac{٢ \, س}{٣}\right)^٨ = {}^{١٠}ق_٢ \left(\frac{٢ \, س}{٣}\right)^٦$

، عندما $س = \sqrt{٣}$

$\therefore ح_٣ = {}^{١٠}ق_٢ \left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}\right)^٦ = \frac{٣٢٠}{٣}$

$\therefore \frac{ح_٦}{ح_٣} = \frac{٢٥٢}{\left(\frac{٣٢٠}{٣}\right)} = \frac{١٨٩}{٨٠}$

(٤) $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر \, (م \, س)^ر = {}^{ن}ق_ر \, م^ر \, س^ر$

لإيجاد معامل س : نضع ر = ١

معامل $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ \, م = ن \, م = ١٢$ (١)

لإيجاد معامل $س^٢$ نضع ر = ٢

معامل $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ \, م^٢ = \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٦٣$ (٢)

من المعادلة (١) : $م = \frac{١٢}{ن}$

، بالتعويض فى (٢) :

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times \left(\frac{١٢}{ن}\right)^٢ = ٦٣$

$\therefore \frac{٧٢(ن - ١)}{ن} = ٦٣$ $\therefore ٧٢ \, ن - ٧٢ = ٦٣ \, ن$

$\therefore ٩ \, ن = ٧٢$ $\therefore ن = ٨$

، من (١) : $\therefore م = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

(٥) معامل $ح_٦ = {}^{ن}ق_٥$ ومعامل $ح_{١٠} = {}^{ن}ق_٩$

$\therefore {}^{ن}ق_٥ = {}^{ن}ق_٩$ $\therefore ن = ٥ + ٩ = ١٤$

(٦) $ح_٢ = {}^{٨}ق_١ \, أ \, س$ $\therefore ٨ \, أ \, س = ٤$ (١)

، معامل $ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ \, (أ)^٤$ $\therefore ١١٢٠ = ٧٠ \, أ^٤$

$\therefore أ = \pm ٢$

إذا كان أ = ٢ وبالتعويض فى (١) فإن $س = \frac{١}{٤}$

إذا كان أ = −٢ وبالتعويض فى (١) فإن $س = -\frac{١}{٤}$

(٧) $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ \, س^٢ = ٢٨ \, س^٢$

$\therefore {}^{ن}ق_٢ = ٢٨ = {}^{٨}ق_٢$ $\therefore ن = ٨$

، $ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ \, س^٤ = ١١٢٠$

$\therefore س^٤ = ١٦$ $\therefore س = \pm ٢$

(٨) معامل $ح_٣ = {}^{١٠}ق_٢ \, (هـ)^٢ = ١٨٠$

$\therefore هـ^٢ = ٤$ $\therefore هـ = \pm ٢$

، $ح_٥ = {}^{١٠}ق_٤ \, (هـ \, س)^٤ = ٢١٠$

$\therefore (\pm ٢ \, س)^٤ = ١$ $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

(٩) $ح_٦ = {}^{ن}ق_٥ \, س^٥$ ، $ح_٤ = {}^{ن}ق_٣ \, س^٣$

، $ح_٨ = {}^{ن}ق_٧ \, س^٧$

$\because ٥ \, ح_٦ \times ح_٦ = ١٨ \, ح_٤ \times ح_٨$

$\therefore ٥ \times \frac{ح_٦}{ح_٤} = ١٨ \times \frac{ح_٨}{ح_٦}$

$\therefore ٥ \times \frac{{}^{ن}ق_٥ \, س^٥}{{}^{ن}ق_٣ \, س^٣} = ١٨ \times \frac{{}^{ن}ق_٧ \, س^٧}{{}^{ن}ق_٥ \, س^٥}$

$\therefore ٥ \times \frac{{}^{ن}ق_٤}{{}^{ن}ق_٣} \times \frac{{}^{ن}ق_٥}{{}^{ن}ق_٤} = ١٨ \times \frac{{}^{ن}ق_٦}{{}^{ن}ق_٥} \times \frac{{}^{ن}ق_٧}{{}^{ن}ق_٦}$

$\therefore ٥ \times \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤}$

$= ١٨ \times \frac{ن - ٧ + ١}{٧} \times \frac{ن - ٦ + ١}{٦}$

$\therefore \frac{(ن - ٤)(ن - ٣)}{٤} = ٣ \times \frac{(ن - ٦)(ن - ٥)}{٧}$

$\therefore \frac{ن^٢ - ٧ \, ن + ١٢}{٤} = \frac{٣(ن^٢ - ١١ \, ن + ٣٠)}{٧}$

$\therefore ٧ \, ن^٢ - ٤٩ \, ن + ٨٤ = ١٢ \, ن^٢ - ١٣٢ \, ن + ٣٦٠$

$\therefore ٥ \, ن^٢ - ٨٣ \, ن + ٢٧٦ = ٠$

$\therefore (ن - ١٢)(٥ \, ن - ٢٣) = ٠$

$\therefore ن = ١٢$ أو $ن = \frac{٢٣}{٥}$ مرفوض

(١٠) معامل $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \, أ^٥ \, ب^٥ = \frac{٦٣}{٨}$

$\therefore ٨ \times {}^{١٠}ق_٥ \, أ^٥ \, ب^٥ = ٦٣$

$\therefore ٢٠١٦ \, أ^٥ \, ب^٥ = ٦٣$

$\therefore أ^٥ \, ب^٥ = \frac{١}{٣٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٥$

$\therefore أ \, ب = \frac{١}{٢}$ $\therefore ٢ \, أ \, ب = ١$

(١١) الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{١٥}$

هما $ح_٨$ ، $ح_٩$

$\therefore أ = ح_٨ = {}^{١٥}ق_٧ \left(-\frac{١}{س}\right)^٧ (س)^٨$

$\therefore أ = -{}^{١٥}ق_٧ \, س$ (١)

، $ب = ح_٩ = {}^{١٥}ق_٨ \left(\frac{-١}{س}\right)^٨ (س)^٧$

$\therefore ب \, س^٢ = {}^{١٥}ق_٨ \, س$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\because {}^{١٥}ق_٨ = {}^{١٥}ق_٧$

$\therefore أ + ب \, س^٢ =$ صفر

(١٢) معاملات $ح_٤$ ، $ح_٥$ ، $ح_٦$

هى ${}^{ن}ق_٣ \times ٢^{ن-٣}$ ، ${}^{ن}ق_٤ \times ٢^{ن-٤}$ ، ${}^{ن}ق_٥ \times ٢^{ن-٥}$

على الترتيب :

$\therefore ٢ \, {}^{ن}ق_٤ \times ٢^{ن-٤}$

$= {}^{ن}ق_٣ \times ٢^{ن-٣} + {}^{ن}ق_٥ \times ٢^{ن-٥}$

بالضرب × $٢^{-ن+٥}$

$\therefore ٤ \, {}^{ن}ق_٤ = ٤ \, {}^{ن}ق_٣ + {}^{ن}ق_٥$ (بالقسمة على ${}^{ن}ق_٤$)

$\therefore ٤ = ٤ \times \frac{{}^{ن}ق_٣}{{}^{ن}ق_٤} + \frac{{}^{ن}ق_٥}{{}^{ن}ق_٤}$

$\therefore ٤ = \frac{٤ \times ٤}{ن - ٤ + ١} + \frac{ن - ٤ + ١}{٥}$

$\therefore ٤ = \frac{١٦}{ن - ٣} + \frac{ن - ٤}{٥}$

$\therefore ٤ \times ٥ (ن - ٣) = ٥ \times ١٦ + (ن - ٤)(ن - ٣)$

$\therefore ٢٠ \, ن - ٦٠ = ٨٠ + ن^٢ - ٧ \, ن + ١٢$

$\therefore ن^٢ - ٢٧ \, ن + ١٥٢ = ٠$

$\therefore (ن - ١٩)(ن - ٨) = ٠$

$\therefore ن = ١٩$ أ، ٨

(١٣) $ح_١ = {}^{ن}ق_٠ \, (م \, س)^٠ = ١$

، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ \, (م \, س) = ن \, م \, س = \frac{-١٠}{٣} س$

$\therefore م = \frac{-١٠}{٣ \, ن}$ (١)

، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ \, (م \, س)^٢ = {}^{ن}ق_٢ \, م^٢ \, س^٢ = ٥ \, س^٢$

$\therefore {}^{ن}ق_٢ \, م^٢ = ٥$ $\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٥$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times \left(\frac{-١٠}{٣ \, ن}\right)^٢ = ٥$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times \frac{١٠٠}{٩ \, ن^٢} = ٥$

$\therefore ١٠ \, ن - ١٠ = ٩ \, ن$ $\therefore ن = ١٠$

، من (١) : $\therefore م = \frac{-١٠}{٣(١٠)} = -\frac{١}{٣}$

، الحد الاوسط هو $ح_٦$

$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \, (م \, س)^٥$

وعندما $س = ٣$

$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \, (-١)^٥ = -٢٥٢$

(١٤) $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ \, (-٢ \, س) = -٢ \, ن \, س = \frac{-١٠}{٣}$

$\therefore س = \frac{٥}{٣ \, ن}$

، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ \, (-٢ \, س)^٢ = \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times ٤ \, س^٢ = \frac{٤٠}{٩}$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times ٤ \left(\frac{٥}{٣ \, ن}\right)^٢ = \frac{٤٠}{٩}$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢} \times \frac{٤ \times ٢٥}{٩ \, ن^٢} = \frac{٤٠}{٩}$

$\therefore ٨ \times ٤ \times ٢٥ \times ن(ن - ١) = ٢ \times ٩ \times ٤٠ \times ن^٢$

$\therefore ٥ \, ن(ن - ١) = ٤ \, ن^٢$

$\therefore ٥ \, ن^٢ - ٥ \, ن = ٤ \, ن^٢$

$\therefore ن^٢ - ٥ \, ن = ٠$ $\therefore ن(ن - ٥) = ٠$

$\therefore ن = ٥$ ومنها $س = \frac{١}{٣}$

، $ح_٤ = {}^{٥}ق_٣ \, (-٢ \, س)^٣ = ١٠ \times -٨ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^٣$

$= \frac{-٨٠}{٢٧}$

(١٥) $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ \, م \, س = ن \, م \, س$

، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ \, (م \, س)^٢$ ، $ح_٤ = {}^{ن}ق_٣ \, (م \, س)^٣$

معامل $س = ن \, م = ٢٤$ $\therefore م = \frac{٢٤}{ن}$

، معامل $س^٢ = {}^{ن}ق_٢ \, م^٢ = ٢٥٢$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٢٥٢$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \left(\frac{٢٤}{ن}\right)^٢ = ٢٥٢$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times \frac{٥٧٦}{ن^٢} = ٢٥٢$

$\therefore ٢٨٨(ن - ١) = ٢٥٢ \, ن$

$\therefore ٢٨٨ \, ن - ٢٨٨ = ٢٥٢ \, ن$

$\therefore ٣٦ \, ن = ٢٨٨$

ومنها $ن = ٨$ $\therefore م = \frac{٢٤}{٨} = ٣$

، معامل $س^٣ = {}^{ن}ق_٣ \, م^٣ = {}^{٨}ق_٣ \, (٣)^٣ = ١٥١٢$

(١٦) معامل $ح_٤ = {}^{ن}ق_٣$ ومعامل $ح_٣ = ٣ \, {}^{ن-١}ق_٢$

$\therefore {}^{ن}ق_٣ = ٣ \times {}^{ن-١}ق_٢$

$\therefore \frac{|ن}{|ن - ٣ \; |٣} = ٣ \times \frac{|ن - ١}{|ن - ٣ \; |٢}$

$\therefore \frac{ن \, |ن - ١}{٣ \; |٢} = \frac{٣ \, |ن - ١}{|٢}$ $\therefore ن = ٩$

(١٧) الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(٢ \, أ + \frac{١}{س}\right)^{٢ن+١}$

هما $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

، $ح_{ن+١} = {}^{٢ن+١}ق_ن \left(\frac{١}{س}\right)^ن (٢ \, أ)^{ن+١}$

، $ح_{ن+٢} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١} \left(\frac{١}{س}\right)^{ن+١} (٢ \, أ)^ن$

$\therefore {}^{٢ن+١}ق_ن \left(\frac{١}{س}\right)^ن (٢ \, أ)^{ن+١}$

$= {}^{٢ن+١}ق_{ن+١} \left(\frac{١}{س}\right)^{ن+١} (٢ \, أ)^ن$

، $\because {}^{٢ن+١}ق_ن = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١}$

$\therefore ٢ \, أ = \frac{١}{س}$

$\therefore ٢ \, أ \, س = ١$ ، $\because أ + س = \frac{٩}{٤}$

$\therefore أ = \frac{٩}{٤} - س$

$\therefore ٢\left(\frac{٩}{٤} - س\right) س = ١$

$\therefore \frac{٩}{٢} س - ٢ \, س^٢ = ١$

$\therefore ٤ \, س^٢ - ٩ \, س + ٢ = ٠$

$(٤ \, س - ١)(س - ٢) = ٠$

$\therefore س = ٢$ ومنها $أ = \frac{١}{٤}$

أو $س = \frac{١}{٤}$ ومنها $أ = ٢$

٩

(١) مفكوك $(م + س)^ن = م^ن + ن \, م^{ن-١} \, س$

$+ \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^{ن-٢} \, س^٢ + \dots$

بمقارنة معاملات $س^٠$: $\therefore م^ن = ٣ \, أ$ (١)

، بمقارنة معاملات س : $ن \, م^{ن-١} = ٦ \, أ$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore ن \, م^{-١} = ٢$ $\therefore \frac{ن}{م} = ٢$ $\therefore م = \frac{ن}{٢}$

بمقارنة معاملات $س^٢$: $\frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^{ن-٢} = ٥ \, أ$ (٣)

بقسمة (٣) على (١) :

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} م^{-٢} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore \frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} \times \left(\frac{ن}{٢}\right)^{-٢} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore \frac{ن(ن - ١) \times ٤}{٢ \, ن^٢} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore ١٢(ن^٢ - ن) = ١٠ \, ن^٢$

$\therefore ١٢ \, ن^٢ - ١٢ \, ن = ١٠ \, ن^٢$

$\therefore ٢ \, ن^٢ - ١٢ \, ن = ٠$ $\therefore ٢ \, ن(ن - ٦) = ٠$

$\therefore ن = ٦$ ، $م = ٣$ ، $أ = \frac{٣^٦}{٣} = ٣^٥$

(٢) مفكوك $(١ + م \, س)^{١٠} = ١ + ١٠ \, م \, س$

$+ \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} (م \, س)^٢ + \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} (م \, س)^٣ + \dots$

بمقارنة معاملات $س^٠$: $أ = ١$

بمقارنة معاملات س : $ب = ١٠ \, م$ (١)

بمقارنة معاملات $س^٢$

$\frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} م^٢ = ٤٥ \, م^٢ = هـ$ (٢)

بمقارنة معاملات $س^٣$: $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} م^٣$

$= ١٢٠ \, م^٣ = ١٥$

$\therefore م = \frac{١}{٢}$

، بالتعويض فى (١) : $\therefore ب = ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٥$

، بالتعويض فى (٢) : $\therefore هـ = ٤٥ \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{٤٥}{٤}$

(٣) مفكوك $(١ + هـ \, س)^ن = ١ + {}^{ن}ق_١ \, هـ \, س$

$+ {}^{ن}ق_٢ \, (هـ \, س)^٢ + {}^{ن}ق_٣ \, (هـ \, س)^٣ + \dots$

بمقارنة معاملات س : $ن \, هـ = ٢٠$ (١)

بمقارنة معاملات $س^٢$: $أ_١ = {}^{ن}ق_٢ \, هـ^٢$

بمقارنة معاملات $س^٣$: $أ_٢ = {}^{ن}ق_٣ \, هـ^٣$

، $\because ١٦ \, أ_١ = ٣ \, أ_٢$

$\therefore ١٦ \, {}^{ن}ق_٢ \, هـ^٢ = ٣ \, {}^{ن}ق_٣ \, هـ^٣$

$\therefore \frac{١٦}{٣} = \frac{{}^{ن}ق_٣}{{}^{ن}ق_٢} هـ$

$\therefore \left(\frac{ن - ٣ + ١}{٣}\right) هـ = \frac{١٦}{٣}$

$\therefore \left(\frac{ن - ٢}{٣}\right) هـ = \frac{١٦}{٣}$ $\therefore (ن - ٢) هـ = ١٦$

$\therefore ن \, هـ - ٢ \, هـ = ١٦$ ، من (١) :

$\therefore ٢٠ - ٢ \, هـ = ١٦$

$\therefore هـ = ٢$ ومنها $ن = ١٠$

١٠

الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢ س + ص)^٧$ هما $ح_٤$ ، $ح_٥$

$ح_٤ = {}^٧ق_٣ (ص)^٣ (٢ س)^٤ = ٥٦٠ س^٤ ص^٣$

، $ح_٥ = {}^٧ق_٤ (ص)^٤ (٢ س)^٣ = ٢٨٠ س^٣ ص^٤$

، الحد الأوسط في مفكوك $(٢ س + ص)^٨$ هو

$ح_٥ = {}^٨ق_٤ (ص)^٤ (٢ س)^٤ = ١١٢٠ س^٤ ص^٤$

∴ النسبة $= \frac{٥٦٠ س^٤ ص^٣ + ٢٨٠ س^٣ ص^٤}{١١٢٠ س^٤ ص^٤}$

$= \frac{٥٦٠ س^٤ ص^٣}{١١٢٠ س^٤ ص^٤} + \frac{٢٨٠ س^٣ ص^٤}{١١٢٠ س^٤ ص^٤}$

$= \frac{١}{٢ ص} + \frac{١}{٤ س} = \frac{١}{٤} \left(\frac{٢}{ص} + \frac{١}{س}\right)$

١١

معامل الحد الأوسط في مفكوك $(س + ص)^{٢ن}$ هو $ح_{ن+١}$

، $ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_ن ص^ن س^ن$

∴ المعامل $= {}^{٢ن}ق_ن$

، الحدين الأوسطين في مفكوك $(س + ص)^{٢ن - ١}$

هما $ح_ن$ ، $ح_{ن+١}$

، $ح_ن = {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} ص^{ن-١} س^ن$

∴ المعامل $= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١}$

، $ح_{ن+١} = {}^{٢ن-١}ق_ن ص^ن س^{ن-١}$

∴ المعامل $= {}^{٢ن-١}ق_ن$

مجموع معاملي $ح_ن$ ، $ح_{ن+١}$ $= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} + {}^{٢ن-١}ق_ن = {}^{٢ن}ق_ن$

= معامل $ح_{ن+١}$ في مفكوك $(س + ص)^{٢ن}$

١٢

ل = (ح١ ، ح٣ ، ح٥ ، ...)

٨ = (ح١ ، ح٣ ، ح٥ ، ...)

١٦

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (ب)	(٥) (جـ)
(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (ب)	(٩) (أ)	(١٠) (د)
(١١) (ب)	(١٢) (أ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (ب)

إرشادات الحل ١٦ :

(١) $(١ + ٢ س + س^٢)^{٥٠} = ((١ + س)^٢)^{٥٠}$

$= (١ + س)^{١٠٠}$

∴ عدد الحدود = ١٠١

(٢) $(١ + س)^{١٠٠} (١ - س + س^٢)^{١٠٠}$

$= (١ + س)(١ + س)^{٩٩} (١ - س + س^٢)^{١٠٠}$

$= (١ + س)(١ + س^٣)^{١٠٠}$

$= ١ (١ + س^٣)^{١٠٠} + س (١ + س^٣)^{١٠٠}$

∴ عدد الحدود = ١٠١ + ١٠١ = ٢٠٢

(٣) عدد حدود المفكوك $(س + ص + ع)^{١٩}$ هو نفس فكرة توزيع ١٩ كرة متماثلة على ٣ صناديق

أي أن :

$^{١٩+٣-١}ق_{١٩} = {}^{٢١}ق_{١٩} = {}^{٢١}ق_٢ = ٢١٠$ حداً

(٤) ∵ عدد حدود المفكوك $= {}^{ن+٢}ق_٢$

$= \frac{(ن + ٢)(ن + ١)}{٢}$

∴ $\frac{(ن + ٢)(ن + ١)}{٢} = ٧٨$

∴ $ن^٢ + ٣ن + ٢ = ١٥٦$

∴ $ن^٢ + ٣ن - ١٥٤ = ٠$ ∴ $(ن + ١٤)(ن - ١١) = ٠$

∴ ن = − ١٤ (مرفوض) أ، ن = ١١

⑬ ${}^{10}\text{ق}_0 + {}^{10}\text{ق}_1\text{س} + {}^{10}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{10}\text{ق}_{10}\text{س}^{10} = (1+\text{س})^{10}$

∴ $\int({}^{10}\text{ق}_0 + {}^{10}\text{ق}_1\text{س} + {}^{10}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{10}\text{ق}_{10}\text{س}^{10})\,\text{ء}\text{س} = \int(1+\text{س})^{10}\,\text{ء}\text{س}$

∴ ${}^{10}\text{ق}_0\text{س} + \frac{1}{2}\,{}^{10}\text{ق}_1\text{س}^2 + \frac{1}{3}\,{}^{10}\text{ق}_2\text{س}^3 + \dots + \frac{1}{11}\,{}^{10}\text{ق}_{10}\text{س}^{11} = \frac{1}{11}(1+\text{س})^{11} + \text{ث}$

بوضع س = ٠ ∴ $\text{ث} = \frac{-1}{11}$

∴ ${}^{10}\text{ق}_0\text{س} + \frac{1}{2}\,{}^{10}\text{ق}_1\text{س}^2 + \frac{1}{3}\,{}^{10}\text{ق}_2\text{س}^3 + \dots + \frac{1}{11}\,{}^{10}\text{ق}_{10}\text{س}^{11} = \frac{1}{11}(1+\text{س})^{11} - \frac{1}{11}$

بوضع س = ١

∴ ${}^{10}\text{ق}_0 + \frac{1}{2}\,{}^{10}\text{ق}_1 + \frac{1}{3}\,{}^{10}\text{ق}_2 + \dots + \frac{1}{11}\,{}^{10}\text{ق}_{10} = \frac{1}{11}\left[(2)^{11} - 1\right]$

⑭ مجموع معاملات الـ ٣٠ حداً الأخيرة = مجموع معاملات الـ ٣٠ حداً الأولى

∴ مجموع معاملات الـ ٣٠ حداً الأخيرة = $\frac{1}{2}$ مجموع معاملات حدود المفكوك

$= \frac{1}{2} \times 2^{59} = 2^{58}$

⑮ ∵ الحد الأوسط $(\text{ح}_6) = \frac{63}{8}$

∴ ${}^{10}\text{ق}_5 \times \frac{1}{\text{س}^5} \times \text{س}^5\,\text{جا}^5\text{س} = \frac{63}{8}$

∴ $\text{جا}^5\text{س} = \frac{1}{32}$ ∴ $\text{جا}\,\text{س} = \frac{1}{2}$

∴ $\text{س} = \text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\pi}{6}$ حيث ن ∈ ص

17

الحد الأوسط في مفكوك $(1+\text{س})^{2\text{ن}}$ هو $\text{ح}_{\text{ن}+1}$

، $\text{ح}_{\text{ن}+1} = {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(\text{س})^{\text{ن}} = \frac{(2\text{ن})!}{\text{ن}!\,\text{ن}!}(\text{س})^{\text{ن}}$

$= \frac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-2)(2\text{ن}-3)\dots\times3\times2\times1}{\text{ن}!\,\text{ن}!}(\text{س})^{\text{ن}}$

$= \frac{[2\text{ن}(2\text{ن}-2)(2\text{ن}-4)\times\dots\times4\times2][(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-3)\dots\times3\times1]}{\text{ن}!\times\text{ن}!}(\text{س})^{\text{ن}}$

$= \frac{2^{\text{ن}}[\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots\times2\times1][(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-3)\dots\times3\times1]}{\text{ن}!\,\text{ن}!}(\text{س})^{\text{ن}}$

$= \frac{2^{\text{ن}}[\text{ن}!][1\times3\times5\times\dots(2\text{ن}-1)]}{\text{ن}!\,\text{ن}!}(\text{س})^{\text{ن}}$

$= \frac{1\times3\times5\times\dots(2\text{ن}-1)}{\text{ن}!} \times (2\text{س})^{\text{ن}}$

18

$(\text{أ}+\sqrt{\text{ب}})^{2\text{ن}} + (\text{أ}-\sqrt{\text{ب}})^{2\text{ن}}$

$= 2[\text{ح}_1 + \text{ح}_3 + \text{ح}_5 + \dots + \text{ح}_{2\text{ن}+1}]$

$= 2[{}^{2\text{ن}}\text{ق}_0\,\text{أ}^{2\text{ن}} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2(\sqrt{\text{ب}})^2\text{أ}^{2\text{ن}-2} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_4(\sqrt{\text{ب}})^4\text{أ}^{2\text{ن}-4} + \dots + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{2\text{ن}}(\sqrt{\text{ب}})^{2\text{ن}}]$

$= 2[\text{أ}^{2\text{ن}} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2\,\text{أ}^{2\text{ن}-2}(\text{ب}) + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_4\,\text{أ}^{2\text{ن}-4}(\text{ب}^2) + \dots + (\text{ب})^{\text{ن}}]$

، الحد الأوسط في المفكوك $\text{ح}_{\text{ن}+1}$

$= 2[{}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{2\text{ن}-\text{ن}}(\sqrt{\text{ب}})^{\text{ن}}]$

$= 2[{}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\frac{\text{ن}}{2}}]$

، بوضع أ = ٥ ، ب = ٢٠

∴ $(5+\sqrt{20})^{2\text{ن}} + (5-\sqrt{20})^{2\text{ن}}$

$= 2[5^{2\text{ن}} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2(5)^{2\text{ن}-2}(\sqrt{20})^2 + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_4(5)^{2\text{ن}-4}(\sqrt{20})^4 + \dots + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{2\text{ن}}(\sqrt{20})^{2\text{ن}}]$

$= 2[5^{2\text{ن}} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2 \times 5^{2\text{ن}-2} \times 20 + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_4\,5^{2\text{ن}-4} \times 20^2 + \dots + 20^{\text{ن}}]$

$= 2\times5[5^{2\text{ن}-1} + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2 \times 5^{2\text{ن}-3} \times 20 + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_4 \times 5^{2\text{ن}-5} \times 20^2 + \dots + 4\times20^{\text{ن}-1}]$

= ١٠ × عدد صحيح

∴ $(5+\sqrt{20})^{2\text{ن}} + (5-\sqrt{20})^{2\text{ن}}$ يقبل القسمة على ٥

19

∵ $(1+\text{س})^{2\text{ن}} = (1+\text{س})^{\text{ن}}(1+\text{س})^{\text{ن}}$

∴ ${}^{2\text{ن}}\text{ق}_0 + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_1\text{س} \times {}^{2\text{ن}}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$

$= ({}^{\text{ن}}\text{ق}_0 + {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}})({}^{\text{ن}}\text{ق}_0 + {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}})$

وبمساواة معاملات $\text{س}^{\text{ن}}$ في الطرفين.

∴ ${}^{2\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ({}^{\text{ن}}\text{ق}_0\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_1\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_2\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_0)$

∴ $\frac{(2\text{ن})!}{\text{ن}!\,\text{ن}!} = ({}^{\text{ن}}\text{ق}_0)^2 + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_1)^2 + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_2)^2 + \dots + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}})^2$

20

بفرض أن :

$(1-\text{س}+\text{س}^2-\text{س}^3+\dots+\text{س}^{2\text{م}})$

$(1+\text{س}+\text{س}^2+\text{س}^3+\dots+\text{س}^{2\text{م}})$

$= \text{أ}_0 + \text{أ}_1\text{س} + \text{أ}_2\text{س}^2 + \text{أ}_3\text{س}^3 + \dots$

بوضع س = ١ في الطرفين

∴ $1 \times (2\text{ن}+1) = \text{أ}_0 + \text{أ}_1 + \text{أ}_2 + \text{أ}_3 + \dots$ (١)

بوضع س = -١ في الطرفين

∴ $(2\text{ن}+1) \times 1 = \text{أ}_0 - \text{أ}_1 + \text{أ}_2 - \text{أ}_3 + \dots$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $4\text{ن} + 2 = 2(\text{أ}_0 + \text{أ}_2 + \text{أ}_4 + \dots) = 2 \times 61$

∴ ٤ن = ١٢٠ ∴ ن = ٣٠

21

① ∵ $(1+\text{س})^{25}(1+\text{س})^{25} = (1+\text{س})^{50}$

∴ $({}^{25}\text{ق}_0 + {}^{25}\text{ق}_1\text{س} + {}^{25}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{25}\text{ق}_{25}\text{س}^{25})({}^{25}\text{ق}_0 + {}^{25}\text{ق}_1\text{س} + {}^{25}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{25}\text{ق}_{25}\text{س}^{25})$

$= {}^{50}\text{ق}_0 + {}^{50}\text{ق}_1\text{س} + {}^{50}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{50}\text{ق}_{50}\text{س}^{50}$ وبمساواة معاملات س^{15} في الطرفين.

∴ ${}^{25}\text{ق}_0\,{}^{25}\text{ق}_{15} + {}^{25}\text{ق}_1\,{}^{25}\text{ق}_{14} + {}^{25}\text{ق}_2\,{}^{25}\text{ق}_{13} + \dots + {}^{25}\text{ق}_{15}\,{}^{25}\text{ق}_0 = {}^{50}\text{ق}_{15}$

∴ ${}^{25}\text{ق}_0\,{}^{25}\text{ق}_{10} + {}^{25}\text{ق}_1\,{}^{25}\text{ق}_{11} + {}^{25}\text{ق}_2\,{}^{25}\text{ق}_{12} + \dots + {}^{25}\text{ق}_{15}\,{}^{25}\text{ق}_{25} = {}^{50}\text{ق}_{15}$

② ∵ $(1+\text{س})^{25}(1-\text{س})^{25} = (1-\text{س}^2)^{25}$

∴ $({}^{25}\text{ق}_0 + {}^{25}\text{ق}_1\text{س} + {}^{25}\text{ق}_2\text{س}^2 + \dots + {}^{25}\text{ق}_{25}\text{س}^{25})({}^{25}\text{ق}_0 - {}^{25}\text{ق}_1\text{س} + {}^{25}\text{ق}_2\text{س}^2 - \dots - {}^{25}\text{ق}_{25}\text{س}^{25})$

$= {}^{25}\text{ق}_0 - {}^{25}\text{ق}_1\text{س}^2 + {}^{25}\text{ق}_2\text{س}^4 - \dots - {}^{25}\text{ق}_{25}\text{س}^{50}$

وبمساواة معاملات س^{20} في الطرفين.

∴ ${}^{25}\text{ق}_0\,{}^{25}\text{ق}_{20} - {}^{25}\text{ق}_1\,{}^{25}\text{ق}_{19} + {}^{25}\text{ق}_2\,{}^{25}\text{ق}_{18} - \dots + {}^{25}\text{ق}_{20}\,{}^{25}\text{ق}_0 = {}^{25}\text{ق}_{10}$

∴ ${}^{25}\text{ق}_0\,{}^{25}\text{ق}_{20} - {}^{25}\text{ق}_1\,{}^{25}\text{ق}_{21} + {}^{25}\text{ق}_2\,{}^{25}\text{ق}_{22} - \dots + {}^{25}\text{ق}_{20}\,{}^{25}\text{ق}_{25} = {}^{25}\text{ق}_{10}$

إجابات تمارين 4

1

① $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{14}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{\text{س}^2}\right)^{\text{ر}} \times (\text{س})^{14-\text{ر}}$

$= {}^{14}\text{ق}_{\text{ر}} \times 2^{\text{ر}} \times \text{س}^{-2\text{ر}} \times \text{س}^{14-\text{ر}}$

$= {}^{14}\text{ق}_{\text{ر}} \times 2^{\text{ر}} \times \text{س}^{14-3\text{ر}}$

بوضع ١٤ - ٣ر = ٨ ∴ ر = ٢

∴ معامل $\text{س}^8 = {}^{14}\text{ق}_2 \times 2^2 = 364$

② $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{3\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{3\text{س}}{2}\right)^{11-\text{ر}}$

$= {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{3}{2}\right)^{11-\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{11-\text{ر}}$

$= {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\text{ر}-11}\text{س}^{11-2\text{ر}}$

$= {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2\text{ر}-11}\text{س}^{11-2\text{ر}}$

بوضع ١١ - ٢ر = ١ ∴ ر = ٥

معامل $\text{س} = {}^{11}\text{ق}_5\left(\frac{2}{3}\right)^{2(5)-11} = 693$

③ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-1}{2\text{س}^3}\right)^{\text{ر}}\text{س}^{12-\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-1}{2}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-3\text{ر}} \times \text{س}^{12-\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-1}{2}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{12-4\text{ر}}$

بوضع ١٢ - ٤ر = -٨ ∴ ر = ٥

الحد المشتمل على س^{-8} هو

$\text{ح}_6 = {}^{12}\text{ق}_5\left(\frac{-1}{2}\right)^5\text{س}^{-8} = \frac{-99}{4}\text{س}^{-8}$

④ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{-1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}(2\text{س}^2)^{12-\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{12-\text{ر}} \times (-1)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}}$
$\times\,\text{س}^{24-2\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{12-\text{ر}} \times (-1)^{\text{ر}}$
$\times\,\text{س}^{24-3\text{ر}}$

بوضع ٢٤ - ٣ر = ٠ ∴ ر = ٨

$\text{ح}_9 = {}^{12}\text{ق}_8(2)^{12-8}(-1)^8 = 7920$

⑤ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{\text{ص}}{2\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{2\text{س}}{\text{ص}}\right)^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{-\text{ر}}(2)^{10-\text{ر}}$
$\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{10-2\text{ر}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{10-2\text{ر}}$

بوضع ١٠ - ٢ر = ٤ ∴ ر = ٣

معامل $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^4$ هو ${}^{10}\text{ق}_3(2)^{10-2(3)} = 1920$

⑥ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = \text{س}^2 \times {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{2}{\text{س}^2}\right)^{\text{ر}}\left(\frac{\text{س}^2}{2}\right)^{15-\text{ر}}$

$= \text{س}^2 \times {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}} \times (2)^{2\text{ر}-15}$
$\times\,\text{س}^{-2\text{ر}} \times \text{س}^{30-2\text{ر}}$

$= {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{2\text{ر}-15} \times \text{س}^{32-4\text{ر}}$

بوضع ٣٢ - ٤ر = ١٢ ∴ ر = ٥

معامل س^{12} هو ${}^{15}\text{ق}_5(2)^{2(5)-15} = \frac{3003}{32}$

⑦ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = \text{س}^{-2} \times {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{\text{ر}}(\text{س})^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{-2} \times \text{س}^{-2\text{ر}} \times \text{س}^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{7-3\text{ر}}$

بوضع ٧ - ٣ر = -٥ ∴ ر = ٤

معامل $\frac{1}{\text{س}^5}$ هو ${}^{10}\text{ق}_4 = 210$

⑧ $[(2+\text{س})^{11} + 11(2+\text{س})^{10}(1+\text{س}) + \frac{11\times10}{2\times1}(2+\text{س})^9(1+\text{س})^2 + \dots + (1+\text{س})^{11}]$

$= [(2+\text{س}) + (1+\text{س})]^{11}$

$= [3+2\text{س}]^{11}$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}(2\text{س})^{\text{ر}} \times (3)^{11-\text{ر}}$

$= {}^{11}\text{ق}_{\text{ر}}(2)^{\text{ر}}(3)^{11-\text{ر}} \times \text{س}^{\text{ر}}$

بوضع ر = ٩

معامل س^9 هو ${}^{11}\text{ق}_9(2)^9(3)^{11-9} = 253440$

⑨ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{\text{ر}}(\text{س}^2)^{15-\text{ر}}$

$= {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{-2\text{ر}} \times \text{س}^{30-2\text{ر}}$

$= {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{30-4\text{ر}}$

بوضع ٣٠ - ٤ر = ٦ ∴ ر = ٦

$\text{ح}_7 = {}^{15}\text{ق}_6\,\text{س}^6 = 5005\,\text{س}^6$

$\text{ح}_{\text{ك}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ك}}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ك}}(\text{س})^{10-\text{ك}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{س}^{-\text{ك}} \times \text{س}^{10-\text{ك}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{س}^{10-2\text{ك}}$

بوضع ١٠ - ٢ك = ٦ ∴ ك = ٢

$\text{ح}_3 = {}^{10}\text{ق}_2\,\text{س}^6 = 45\,\text{س}^6$

الحد المشتمل على

$\text{س}^6 = 5005\,\text{س}^6 + 45\,\text{س}^6 = 5050\,\text{س}^6$

⑩ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{6}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}(\text{س})^{6-\text{ر}}$

$= {}^{6}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{-\text{ر}}\,\text{س}^{6-\text{ر}}$

$= {}^{6}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{6-2\text{ر}}$

بوضع ٦ - ٢ر = ٠ ∴ ر = ٣

الحد الخالي من س هو ${}^{6}\text{ق}_3 = 20$

$\text{ح}_{\text{ك}+1} = {}^{6}\text{ق}_{\text{ك}}\left(-\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ك}} \times \text{س}^{6-\text{ك}}$

$= {}^{6}\text{ق}_{\text{ك}}(-1)^{\text{ك}} \times \text{س}^{-\text{ك}}\,\text{س}^{6-\text{ك}}$

$= {}^{6}\text{ق}_{\text{ك}}(-1)^{\text{ك}}\,\text{س}^{6-2\text{ك}}$

بوضع ٦ - ٢ك = ٠ ∴ ك = ٣

∴ الحد الخالي من س هو ${}^{6}\text{ق}_3(-1)^3 = -20$

قيمة الحد الخالي من س هو ٢٠ - (-٢٠) = ٤٠

2

① (ب)	② (أ)	③ (جـ)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)	⑨ (ب)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (ب)	⑰ (أ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (جـ)			

3

$\text{ح}_5 = {}^{\text{ن}}\text{ق}_4\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)^4 \times (2\text{س})^{\text{ن}-4}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_4\,\text{س}^{-8} \times 2^{\text{ن}-4} \times \text{س}^{\text{ن}-4}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_4 \times 2^{\text{ن}-4} \times \text{س}^{\text{ن}-12}$

، ∵ ح_5 حد خالي من س

∴ ن - ١٢ = ٠ ∴ ن = ١٢

4

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times (2\text{س}^2)^{10-\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ل}^{\text{ر}} \times \text{س}^{-3\text{ر}} \times 2^{10-\text{ر}}$
$\times\,\text{س}^{20-2\text{ر}}$

$= {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{ل}^{\text{ر}} \times (2)^{10-\text{ر}} \times \text{س}^{20-5\text{ر}}$

بوضع ٢٠ - ٥ر = ١٥ ∴ ر = ١

معامل $\text{س}^{15} = {}^{10}\text{ق}_1\,\text{ل}(2)^{10-1} = 5120\,\text{ل}$

بوضع ٢٠ - ٥ر = ٥ ∴ ر = ٣

معامل $\text{س}^5 = {}^{10}\text{ق}_3\,\text{ل}^3(2)^{10-3} = 15360\,\text{ل}^3$

∴ $5120\,\text{ل} = 15360\,\text{ل}^3$ ∴ $\text{ل}^2 = \frac{1}{3}$

∴ $\text{ل} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

٥

الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\frac{2س}{3} + \frac{3}{2س}\right)^{12}$ هو $ح_7$

① $ح_7 = {}^{12}ق_6 \left(\frac{3}{2س}\right)^6 \left(\frac{2س}{3}\right)^6 = 924$ س

② $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \left(\frac{3}{2س}\right)^ر \left(\frac{2س}{3}\right)^{12-ر}$

$= {}^{12}ق_ر \left(\frac{3}{2}\right)^ر (س)^{-ر} \left(\frac{2}{3}\right)^{12-ر} (س)^{12-ر}$

$= {}^{12}ق_ر \left(\frac{3}{2}\right)^ر \left(\frac{2}{3}\right)^{ر-12} (س)^{12-2ر}$

$= {}^{12}ق_ر \left(\frac{3}{2}\right)^{2ر-12} (س)^{12-2ر}$

• بوضع ١٢ − ٢ ر = ٣ ∴ ر = ٣ [as printed]

∴ الحد المشتمل على

س^3 هو ${}^{12}ق_3 \left(\frac{3}{2}\right)^{2(3)-12}$ س^3 = $\frac{14080}{729}$ س^3

٦

$ح_{ر+1} = {}^9ق_ر \left(\frac{1}{3س}\right)^ر (9س^2)^{9-ر}$

$= {}^9ق_ر \left(\frac{1}{3}\right)^ر س^{-ر} (9)^{9-ر}$

$\times (س^2)^{9-ر}$

$= {}^9ق_ر \left(\frac{1}{3}\right)^ر (9)^{9-ر} (س)^{-ر}$

$\times (س)^{18-2ر}$

$= {}^9ق_ر \left(\frac{1}{3}\right)^ر (9)^{9-ر} (س)^{18-3ر}$

• بوضع ١٨ − ٣ ر = ٠ ∴ ر = ٦

∴ قيمة الحد الخالى من س هو ${}^9ق_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 (9)^{9-6} = 84$

• ∵ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

• $ح_5 = {}^9ق_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 (9)^{9-4}$ س$^{18-3(4)}$

$= 91854$ س^6

• $ح_6 = {}^9ق_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 (9)^{9-5}$ س$^{18-3(5)} = 30618$ س^3

∴ 91854 س^6 = 30618 س^3

∴ س^3 = $\frac{1}{27}$ ∴ س = $\frac{1}{3}$

٧

∴ $ح_{ر+1} = {}^6ق_ر \left(\frac{-3}{س^2}\right)^ر (س^2)^{6-ر}$

$= {}^6ق_ر (-3)^ر (س)^{-2ر} (س)^{12-2ر}$

$= {}^6ق_ر (-3)^ر (س)^{12-4ر}$ [as printed: ١٢ − ٨ ر]

• بوضع ١٢ − ٨ ر = ٧ ∴ ر = $\frac{5}{8}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد يشتمل على س^7

٨

$ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \left(\frac{-2}{س^3}\right)^ر \left(\frac{س}{2}\right)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_ر (-2)^ر (س)^{-3ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-ر}$

$\times (س)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_ر (-2)^ر \left(\frac{1}{2}\right)^{10-ر} (س)^{10-4ر}$

• بوضع ١٠ − ٤ ر = ٠ ∴ ر = $2\frac{1}{2}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد خالى من س

• بوضع ١٠ − ٤ ر = −٢ ∴ ر = ٣

∴ معامل $\frac{1}{س^2}$ هو ${}^{10}ق_3 (-2)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} = \frac{-15}{2}$

٩

① $ح_{ر+1} = {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{8س}\right)^ر (س^2)^{13-ر}$

$= {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{8}\right)^ر (س)^{-ر} (س)^{26-2ر}$

$= {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{8}\right)^ر (س)^{26-3ر}$

• بوضع ٢٦ − ٣ ر = ١ ∴ ر = $\frac{25}{3}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد يشتمل على س

② $ح_4 = {}^{13}ق_3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 (س)^{26-3(3)}$

• $ح_{11} = {}^{13}ق_{10} \left(\frac{1}{8}\right)^{10}$ س$^{26-3(10)}$

∴ ${}^{13}ق_3 \left(\frac{1}{8}\right)^3$ س^{17} = ${}^{13}ق_{10} \left(\frac{1}{8}\right)^{10}$ س$^{-4}$

∴ س^{21} = $\left(\frac{1}{8}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

∴ س = $\frac{1}{2}$

[obscured]

(س^2)$^{11-ر}$

$= {}^{11}ق_ر (أ)^{11-2ر} (س)^{22-3ر}$

بوضع ٢٢ − ٣ ر = ٧ ∴ ر = ٥

∴ معامل س^7 هو ${}^{11}ق_5 (أ)^{11-2(5)} = 462$ أ

• بوضع ٢٢ − ٣ ر = ٤ ∴ ر = ٦

∴ معامل س^4 هو ${}^{11}ق_6 (أ)^{11-2(6)} = 462$ أ$^{-1}$

∴ 462 أ = 462 أ$^{-1}$ ∴ أ^2 = ١

∴ أ = ± ١

١٥

$\left(س + \frac{1}{س}\right)^9 \left(س - \frac{1}{س}\right)^9 = \left(س^2 - \frac{1}{س^2}\right)^9$

• $ح_{ر+1} = {}^9ق_ر \left(\frac{-1}{س^2}\right)^ر (س^2)^{9-ر}$

$= {}^9ق_ر (-1)^ر (س)^{-2ر} (س)^{18-2ر}$

$= {}^9ق_ر (-1)^ر$ س$^{18-4ر}$

• بوضع ١٨ − ٤ ر = ٦ ∴ ر = ٣

∴ معامل س^6 هو ${}^9ق_3 (-1)^3 = -84$

• بوضع ١٨ − ٤ ر = −٣ ∴ ر = $\frac{21}{4}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد يشتمل على س$^{-3}$

١٦

$ح_{ر+1} = {}^{2ن}ق_ر (س^{-3})^ر (س^5)^{2ن-ر}$

$= {}^{2ن}ق_ر (س)^{-3ر} (س)^{10ن-5ر}$

$= {}^{2ن}ق_ر$ س$^{10ن-8ر}$

• بوضع ١٠ ن − ٧ ر = ٠

∴ ١٠ ن = ٧ ر ∴ ر = $\frac{10ن}{7}$

وحيث أن ر ∈ ط ∴ ن مضاعف للعدد ٧

• عندما ن = ٧ ∴ ر = $\frac{10 \times 7}{7} = 10$

∴ $ح_{11} = {}^{2(7)}ق_{10} = 1001$

[obscured]

$ح_{ر+1} = {}^نق_ر \left(\frac{ب}{س^ك}\right)^ر (أ س^م)^{ن-ر}$

$= {}^نق_ر$ بر س$^{-كر}$ × أ$^{ن-ر}$ × س$^{م(ن-ر)}$

$= {}^نق_ر$ بر أ$^{ن-ر}$ س$^{-كر+م ن-م ر}$

ولإيجاد الحد الخالى من س نضع

− ك ر + م ن − م ر = ٠

∴ م ن = (ك + م) ر ∴ ر = $\frac{م ن}{ك + م}$

∴ حتى يكون للمفكوك حدًا خاليًا من س فإنه يجب

أن ر ∈ ط أى أن م ن يقبل القسمة على (ك + م)

١٨

$ح_{ر+1} = {}^{21}ق_ر \left(\frac{-3}{س}\right)^ر (2س^2)^{21-ر}$

$= {}^{21}ق_ر (-3)^ر س^{-ر} (2)^{21-ر}$

$(س)^{42-2ر}$

$= {}^{21}ق_ر (-3)^ر (2)^{21-ر}$ س$^{42-3ر}$

• بوضع ٤٢ − ٣ ر = صفر ∴ ر = ١٤

∴ $ح_{15}$ هو الحد الخالى من س

∴ $ح_{15} = {}^{2ن}ق_{14} \left(\frac{3}{س}\right)^{14} (س)^{2ن-14}$

$= {}^{2ن}ق_{14} (3)^{14} (س)^{-14} (س)^{2ن-14}$

$= {}^{2ن}ق_{14} (3)^{14} (س)^{2ن-2(14)}$

• بوضع ٢ ن − ٢ (١٤) = ٠ ∴ ن = ١٤

١٩

$ح_7 = {}^نق_6 \left(\frac{-\sqrt{2}}{س^2}\right)^6 \left(\frac{س^2}{\sqrt{2}}\right)^{ن-6}$

$= {}^نق_6 (\sqrt{2})^6 (س)^{-12} (س)^{2ن-12} (\sqrt{2})^{6-ن}$

$= {}^نق_6 (\sqrt{2})^{-ن+12}$ س$^{2ن-24}$

• بوضع ٢ ن − ٢٤ = صفر ∴ ن = ١٢

قيمة $ح_7 = {}^{12}ق_6 (\sqrt{2})^{-12+12} = 924$

١٠

① $ح_{ر+1} = {}^8ق_ر (س)^ر \left(\frac{5}{س}\right)^{8-ر}$

$= {}^8ق_ر (س)^ر (5)^{8-ر} (س)^{ر-8}$

$= {}^8ق_ر (5)^{8-ر} (س)^{2ر-8}$

• بوضع ٢ ر − ٨ = ٠ ∴ ر = ٤

∴ الحد الخالى من س هو $ح_5$ والحد الأوسط هو $ح_5$

∴ الحد الأوسط هو الحد الخالى من س

• $ح_5 = {}^8ق_4 (5)^{8-4} = 43750$

② $ح_3 = {}^8ق_2 (5)^{8-2} (س)^{2\times2-8}$

$= 437500$ س$^{-4}$

• $ح_7 = {}^8ق_6 (5)^{8-6}$ س$^{2\times6-8} = 700$ س^4

∴ $\frac{ح_3}{ح_7} = \frac{437500 س^{-4}}{700 س^4} = \frac{1}{16}$

∴ 700 س^4 = 7000000 س$^{-4}$

∴ س^8 = $10000 = 10^4$ س = ± $\sqrt{10}$

١١

$ح_{ر+1} = {}^{15}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^ر (س^2)^{15-ر}$

$= {}^{15}ق_ر (س)^{-ر} (س)^{30-2ر}$

$= {}^{15}ق_ر (س)^{30-3ر}$

• بوضع ٣٠ − ٣ ر = صفر ∴ ر = ١٠

∴ الحد الخالى من س هو ${}^{15}ق_{10} = 3003$

• الحدين الأوسطين هما $ح_8$ ، $ح_9$

• $ح_8 = {}^{15}ق_7$ س$^{30-3(7)} = {}^{15}ق_7$ س^9

• $ح_9 = {}^{15}ق_8$ س$^{30-3(8)} = {}^{15}ق_8$ س^6

∴ النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى

الحدين الأوسطين = $\frac{3003}{{}^{15}ق_7 + {}^{15}ق_8} = \frac{3003}{12870}$

١٢

$ح_{ر+1} = {}^8ق_ر \left(\frac{1}{2س}\right)^ر (س^2)^{8-ر}$

$= {}^8ق_ر \left(\frac{1}{2}\right)^ر (س)^{-ر} (س)^{16-2ر}$

$= {}^8ق_ر \left(\frac{1}{2}\right)^ر (س)^{16-3ر}$

∴ معامل الحد الأوسط هو

$ح_5 = {}^8ق_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{2^4}$

• بوضع ١٦ − ٣ ر = ١٠ ∴ ر = ٢

∴ معامل س^{10} هو ${}^8ق_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 28 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{28}{2^2}$

∴ $\frac{70}{2^4} = \frac{28}{2^2}$ ∴ أ^2 = $\frac{5}{2}$ ∴ أ = ± $\frac{\sqrt{10}}{2}$

١٣

$ح_{ر+1} = {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{2س}\right)^ر (4س^2)^{13-ر}$

$= {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{2}\right)^ر (س)^{-ر} (4)^{13-ر}$

$\times (س^2)^{13-ر}$

$= {}^{13}ق_ر \left(\frac{1}{2}\right)^ر (4)^{13-ر}$ س$^{26-3ر}$

• بوضع ٢٦ − ٣ ر = ٥ ∴ ر = ٧

∴ معامل س^5 هو ${}^{13}ق_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 (4)^{13-7} = 54912$

• الحدان الأوسطان هما $ح_7$ ، $ح_8$ ∴ $ح_8$ = $ح_7$

∴ ${}^{13}ق_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 (4)^6 (س)^5 = {}^{13}ق_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 (4)^7 (س)^8$

∴ $\frac{1}{2} = 4$ س^3 ∴ س^3 = $\frac{1}{8}$ ∴ س = $\frac{1}{2}$

• بوضع ٢٦ − ٣ ر = ٠

∴ ر = $\frac{26}{3}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد خالٍ من س

١٤

$ح_{ر+1} = {}^{11}ق_ر \left(\frac{1}{2س}\right)^ر (2س^2)^{11-ر}$

[obscured]

$ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^ر (س^ك)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_ر (س)^{-ر} (س)^{10ك-كر}$

$= {}^{10}ق_ر$ س$^{10ك-كر-ر}$

• بوضع ١٠ ك − ك ر − ر = صفر

∴ ك (١٠ − ر) = ر ∴ ك = $\frac{ر}{10 - ر}$

• بوضع ر = ٥ ∴ ك = $\frac{5}{10 - 5} = 1$

بوضع ر = ٨ ∴ ك = $\frac{8}{10 - 8} = 4$

بوضع ر = ٩ ∴ ك = $\frac{9}{10 - 9} = 9$

∴ قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س

هى ١ ، ٤ ، ٩

بالتعويض عن ك = ٩

∴ $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر$ س$^{10(9)-9ر-ر}$

$= {}^{10}ق_ر$ س$^{90-10ر}$

• بوضع ٩٠ − ١٠ ر = صفر ∴ ر = ٩

∴ $ح_{10} = {}^{10}ق_9 = 10$

ورتبة الحد الأوسط هو $ح_6$

∴ معامل $ح_6 = {}^{10}ق_5 = 252$

النسبة بين الحد الخالى من س

ومعامل الحد الأوسط = $\frac{10}{252} = \frac{5}{126}$

٢١

$ح_{ر+1} = {}^{2ن}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^ر (س)^{2ن-ر}$

$= {}^{2ن}ق_ر (س)^{-ر} (س)^{2ن-ر}$

$= {}^{2ن}ق_ر$ س$^{2ن-2ر}$

الحد الأوسط هو $ح_{ن+1} = {}^{2ن}ق_ن$ س$^{2ن-2ن}$

$= {}^{2ن}ق_ن$ س^0

∴ الحد الأوسط $ح_{ن+1}$ هو حد خالى من س

• قيمة هذا الحد عندما (ن = ٨) = ${}^{16}ق_8 = 12870$

[obscured]

$ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \left(\frac{1}{س^2}\right)^ر (س)^{3ن-ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر (س)^{-2ر} (س)^{3ن-ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر$ س$^{3ن-3ر}$

• بوضع ١٠ ن − ٥ ر = صفر

∴ ٢ ن = ر

∴ قيمة الحد الخالى من س = ${}^{3ن}ق_{2ن} = \frac{|3ن}{|2ن\ |ن}$

٢٣

• فى مفكوك $\left(2س + \frac{1}{س^2}\right)^ن$

$ح_3 = {}^نق_2 \left(\frac{1}{س^2}\right)^2 (2س)^{ن-2}$

$= {}^نق_2 (س)^{-4} (2)^{ن-2}$ س$^{ن-2}$

$= {}^نق_2 \times 2^{ن-2} \times$ س$^{ن-6}$

• بوضع ن − ٦ = صفر ∴ ن = ٦

∴ $ح_3 = 2^{6-2} \times {}^6ق_2 = 240$

• فى المفكوك $(1 + ص^2)^3$

$ح_2 = {}^3ق_1 (ص^2)^1 = 30$ ص^2 = ٢٤٠

∴ ص^2 = ٨ ∴ ص = ٢

٢٤

$ح_{ر+1} = {}^{5ن}ق_ر \left(\frac{1}{س^2}\right)^ر (س^3)^{5ن-ر}$

$= {}^{5ن}ق_ر$ س$^{-2ر}$ س$^{15ن-3ر}$

$= {}^{5ن}ق_ر$ س$^{15ن-5ر}$

• بوضع ١٥ ن − ٥ ر = صفر ∴ ر = ٣ ن

∴ $ح_{3ن+1} = {}^{5ن}ق_{3ن}$

• بوضع ١٥ ن − ٥ ر = ٥ ن ∴ ر = ٢ ن

• $ح_{2ن+1} = {}^{5ن}ق_{2ن}$

∴ ${}^{5ن}ق_{3ن} = {}^{5ن}ق_{2ن}$

∴ الحد الخالي من س = معامل الحد المشتمل على س^{٥ن}

∵ ح$_{٤}$ هو الحد الخالي من س

∴ ١٥ ن − ٥ (٣) = صفر   ∴ ن = ١

∴ معامل س^{٥} = ^{٥}ق$_{٢}$ = ١٠

٢٥

ح$_{ر+١}$ = ^{أ}ق$_{ر}$ س^{ر}

، بوضع ر = ب   ∴ معامل س^{ب} = ^{أ}ق$_{ب}$

، بوضع ر = جـ   ∴ معامل س^{جـ} = ^{أ}ق$_{جـ}$

∴ ^{أ}ق$_{ب}$ = ^{أ}ق$_{جـ}$ ∴ أ = ب + جـ

٢٦

ح$_{ر+١}$ = ^{٢ن}ق$_{ر}$ س^{ر} ، بوضع ر = ك

∴ معامل س^{ك} = ^{٢ن}ق$_{ك}$ ، بوضع ر = ك + ٢

∴ معامل س$^{ك+٢}$ = ^{٢ن}ق$_{ك+٢}$

∴ ^{٢ن}ق$_{ك}$ = ^{٢ن}ق$_{ك+٢}$

∴ ك + ك + ٢ = ٢ ن   ∴ ٢ ك + ٢ = ٢ ن

∴ ك + ١ = ن   ∴ ك = ن − ١

٢٧

مفكوك = (س^{٢} + ١) [^{١٠}ق$_{ر}$ ($\frac{-١}{س}$)^{ر} (س)$^{١٠-ر}$]

= (س^{٢} + ١) [(−١)^{ر} × ^{١٠}ق$_{ر}$ س$^{-ر}$ × س$^{١٠-ر}$]

= (س^{٢} + ١) [(−١)^{ر} × ^{١٠}ق$_{ر}$ × س$^{١٠-٢ر}$]

= (−١)^{ر} . ^{١٠}ق$_{ر}$ س$^{١٢-٢ر}$ + (−١)^{ر}

× ^{١٠}ق$_{ر}$ س$^{١٠-٢ر}$

الجزء الأول يحتوي على س^{صفر} إذا كان ١٢ − ٢ ر = صفر

∴ ر = ٦

وقيمته (−١)^{٦} × ^{١٠}ق$_{٦}$ = ٢١٠

والجزء الثاني يحتوي على س^{صفر} إذا كان ١٠ − ٢ ر = صفر

∴ ر = ٥

وقيمته (−١)^{٥} × ^{١٠}ق$_{٥}$ = −٢٥٢

∴ قيمة الحد الخالي من س = ٢١٠ − ٢٥٢ = −٤٢

٢٨

ح$_{ر+١}$ هو الحد العام في مفكوك (١ + س)^{١١}

= ^{١١}ق$_{ر}$ س^{ر}

∴ (١ − س + س^{٢}) × ^{١١}ق$_{ر}$ س^{ر}

= ^{١١}ق$_{ر}$ س^{ر} − ^{١١}ق$_{ر}$ س$^{ر+١}$ + ^{١١}ق$_{ر}$ س$^{ر+٢}$

الجزء الأول يحتوي على س^{٥}

، نضع ر = ٥ فيكون المعامل هو ^{١١}ق$_{٥}$

، الجزء الثاني يحتوي على س^{٥} ، نضع ر + ١ = ٥

∴ ر = ٤ فيكون المعامل هو − ^{١١}ق$_{٤}$

، الجزء الثالث يحتوي على س^{٥} ، نضع ر + ٢ = ٥

∴ ر = ٣ فيكون المعامل هو ^{١١}ق$_{٣}$

∴ معامل س^{٥} = ^{١١}ق$_{٥}$ − ^{١١}ق$_{٤}$ + ^{١١}ق$_{٣}$ = ٢٩٧

حل آخر :

(١ − س + س^{٢}) (١ + س)^{١١} = (١ − س + س^{٢})

(١ + ^{١١}ق$_{١}$ س + ^{١١}ق$_{٢}$ س^{٢} + ^{١١}ق$_{٣}$ س^{٣}

+ ^{١١}ق$_{٤}$ س^{٤} + ^{١١}ق$_{٥}$ س^{٥} + ...)

∴ معامل س^{٥} = ١ × ^{١١}ق$_{٥}$ − ١ × ^{١١}ق$_{٤}$

+ ١ × ^{١١}ق$_{٣}$ = ٢٩٧

٢٩

ح$_{ر+١}$ = ^{٨}ق$_{ر}$ ($\frac{-١}{س}$)^{ر} (س)$^{٨-ر}$

= ^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{-ر}$ × س$^{٨-ر}$

= ^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$

مفكوك (س + ٢)^{٢} (س − $\frac{١}{س}$)^{٨}

= (س^{٢} + ٤ س + ٤) [^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$]

= ^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{١٠-٢ر}$ + ٤ ^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٩-٢ر}$

+ ٤ ^{٨}ق$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$

لإيجاد معامل س في الجزء الأول نضع ١٠ − ٢ ر = ١

∴ ر = $\frac{٩}{٢}$ ∉ ط

∴ لا يوجد معامل لـ س في الجزء الأول

لإيجاد معامل س في الجزء الثاني نضع ٩ − ٢ ر = ١

∴ ر = ٤

∴ قيمة معامل س في الجزء الثاني

= ٤ × ^{٨}ق$_{٤}$ (−١)^{٤} = ٢٨٠

لإيجاد معامل س في الجزء الثالث نضع ٨ − ٢ ر = ١

∴ ر = $\frac{٧}{٢}$ ∉ ط

∴ لا يوجد معامل لـ س في الجزء الثالث

∴ معامل س = ٢٨٠

٣٠

نعتبر الحد العام لـ (١ − س)^{٨} هو ح$_{ر+١}$ = ^{٨}ق$_{ر}$ (−س)^{ر}

= (−١)^{ر} ^{٨}ق$_{ر}$ س^{ر}

ونعتبر الحد العام لـ (٣ + ٢ س)^{٦} هو ح$_{ك+١}$

= ^{٦}ق$_{ك}$ (٢ س)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$

= (٢)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$ × ^{٦}ق$_{ك}$ س^{ك}

∴ المفكوك = (−١)^{ر} (٢)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$ × ^{٨}ق$_{ر}$

× ^{٦}ق$_{ك}$ س$^{ر+ك}$

، ك ≤ ٦ ، ر ≤ ٨

لإيجاد معامل س^{٢} نضع ر + ك = ٢

∴ ك = ٠ ، ر = ٢

∴ (−١)^{٢} (٢)^{٠} (٣)^{٦} × ^{٨}ق$_{٢}$ × ^{٦}ق$_{٠}$ = ٢٠٤١٢

أ، ك = ١ ، ر = ١

∴ (−١) (٢) (٣)$^{٦-١}$ × ^{٨}ق$_{١}$ × ^{٦}ق$_{١}$ = −٢٣٣٢٨

أ، ك = ٢ ، ر = ٠

∴ (−١)^{٠} (٢)^{٢} (٣)$^{٦-٢}$ × ^{٨}ق$_{٠}$ × ^{٦}ق$_{٢}$ = ٤٨٦٠

∴ معامل س^{٢} = ٢٠٤١٢ − ٢٣٣٢٨ + ٤٨٦٠ = ١٩٤٤

٣١

نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام لمفكوك (١ + ٢ س)^{٥}

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٥}ق$_{ر}$ (٢ س)^{ر} = ^{٥}ق$_{ر}$ × (٢)^{ر} × س^{ر}

، نفرض أن ح$_{ك+١}$ هو الحد العام لمفكوك (١ + ن س)^{٤}

∴ ح$_{ك+١}$ = ^{٤}ق$_{ك}$ (ن س)^{ك} = ^{٤}ق$_{ك}$ (ن)^{ك} س^{ك}

∴ الحد العام لمفكوك (١ + ٢ س)^{٥} (١ + ن س)^{٤}

= (٢)^{ر} × ن^{ك}

× ^{٥}ق$_{ر}$ × ^{٤}ق$_{ك}$ س$^{ر+ك}$

ك ≤ ٤ ، ر ≤ ٥

لإيجاد معامل س^{٢} ، نضع ر = ٠ ، ك = ٢

∴ ٢^{٠} × ن^{٢} × ^{٥}ق$_{٠}$ × ^{٤}ق$_{٢}$ = ٦ ن^{٢}

أ، ر = ١ ، ك = ١

∴ ٢ × ن × ^{٥}ق$_{١}$ × ^{٤}ق$_{١}$ = ٤٠ ن

أ، ر = ٢ ، ك = ٠

∴ ٢^{٢} × ن^{٠} × ^{٥}ق$_{٢}$ × ^{٤}ق$_{٠}$ = ٤٠

∴ ٦ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٠ = −٢٦

∴ ٦ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٦٦ = ٠

∴ ٣ ن^{٢} + ٢٠ ن + ٣٣ = ٠

∴ (ن + ٣) (٣ ن + ١١) = ٠

∴ ن = −٣ أو ن = $\frac{-١١}{٣}$

حل آخر :

(١ + ٢ س)^{٥} (١ + ن س)^{٤}

= (١ + ^{٥}ق$_{١}$ × ٢ س + ^{٥}ق$_{٢}$ × (٢ س)^{٢} + ...)

(١ + ^{٤}ق$_{١}$ × ن س + ^{٤}ق$_{٢}$ (ن س)^{٢} + ...)

= (١ + ١٠ س + ٤٠ س^{٢} + ...)

(١ + ٤ ن س + ٦ ن^{٢} س^{٢} + ...)

، ∵ معامل س^{٢} = −٢٦

∴ ٦ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٠ = −٢٦

∴ ٦ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٦٦ = ٠

∴ ٣ ن^{٢} + ٢٠ ن + ٣٣ = ٠

∴ (ن + ٣) (٣ ن + ١١) = ٠

∴ ن = −٣ أو ن = $\frac{-١١}{٣}$

٣٢

(١) نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام في مفكوك

[١ + س (١ + س)]^{٦}

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٦}ق$_{ر}$ (س (١ + س))^{ر}

= ^{٦}ق$_{ر}$ س^{ر} (١ + س)^{ر} ، ر ≤ ٦

نفرض أن ح$_{ك+١}$ هو الحد العام في مفكوك

(١ + س)^{ر} = ^{ر}ق$_{ك}$ س^{ك} ، ك ≤ ر

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٦}ق$_{ر}$ س^{ر} × ^{ر}ق$_{ك}$ س^{ك}

= ^{٦}ق$_{ر}$ × ^{ر}ق$_{ك}$ × س$^{ر+ك}$

، ك ≤ ر ≤ ٦

لإيجاد معامل س^{٣} نضع ر + ك = ٣

ر	٣	٢
ك	٠	١

∴ معامل س^{٣} = ^{٦}ق$_{٣}$ × ^{٣}ق$_{٠}$ + ^{٦}ق$_{٢}$ × ^{٢}ق$_{١}$

= ٢٠ + ٣٠ = ٥٠

حل آخر :

(١ + س + س^{٢})^{٦} = [١ + (س + س^{٢})]^{٦}

= ١ + ٦ (س + س^{٢}) + ١٥ (س + س^{٢})^{٢}

+ ٢٠ (س + س^{٢})^{٣} + ...

= ١ + ٦ س + ٦ س^{٢} + ١٥ (س^{٢} + ٢ س^{٣} + س^{٤})

+ ٢٠ (س^{٣} + ٣ س^{٤} + ٣ س^{٥} + س^{٦}) + ...

∴ معامل س^{٣} = ١٥ × ٢ + ٢٠ = ٥٠

(٢) نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام في مفكوك

(١ + س (١ − س))^{٥}

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٥}ق$_{ر}$ (س (١ − س))^{ر}

= ^{٥}ق$_{ر}$ س^{ر} (١ − س)^{ر}

نفرض أن ح$_{ك+١}$ هو مفكوك (١ − س)^{ر}

= ^{ر}ق$_{ك}$ (−س)^{ك} = ^{ر}ق$_{ك}$ (−١)^{ك} س^{ك}

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٥}ق$_{ر}$ س^{ر} × ^{ر}ق$_{ك}$ (−١)^{ك} س^{ك}

= (−١)^{ك} × ^{٥}ق$_{ر}$ × ^{ر}ق$_{ك}$ س$^{ر+ك}$

، ك ≤ ر ≤ ٥

لإيجاد معامل س^{٢}

نضع ر + ك = ٢

ر	٢	١
ك	٠	١

∴ معامل س^{٢} = (−١)^{٠} × ^{٥}ق$_{٢}$ × ^{٢}ق$_{٠}$

+ (−١)^{١} × ^{٥}ق$_{١}$ × ^{١}ق$_{١}$ = ١٠ − ٥ = ٥

حل آخر :

(١ + س − س^{٢})^{٥} = [١ + (س − س^{٢})]^{٥}

= ١ + ٥ (س − س^{٢}) + ١٠ (س − س^{٢})^{٢} + ...

= ١ + ٥ س − ٥ س^{٢} + ١٠ (س^{٢} − ٢ س^{٣} + س^{٤}) + ...

∴ معامل س^{٢} = −٥ + ١٠ = ٥

(١) (جـ)   (٢) (أ)   (٣) (أ)   (٤) (ب)

(٥) (د)   (٦) (جـ)   (٧) (أ)

إرشادات لحل رقم ٣٣ :

(١) (١ + س^{٢})^{٤٠} (س^{٢} + ٢ + $\frac{١}{س^{٢}}$)$^{-٥}$

= (١ + س^{٢})^{٤٠} ((س + $\frac{١}{س}$)^{٢})$^{-٥}$

= (١ + س^{٢})^{٤٠} $\frac{(س^{٢} + ١)^{-١٠}}{س^{-١٠}}$

= س^{١٠} (١ + س^{٢})^{٣٠}

∴ ح$_{ر+١}$ = س^{١٠} × ^{٣٠}ق$_{ر}$ × س^{٢ر}

= ^{٣٠}ق$_{ر}$ × س$^{٢ر+١٠}$

بوضع ٢ ر + ١٠ = ٢٠   ∴ ر = ٥

∴ معامل س^{٢٠} في المفكوك = ^{٣٠}ق$_{٥}$

(٢) $\sum_{ر=٠}^{٥٠}$ [^{٥٠}ق$_{ر}$ (س − ١)$^{٥٠-ر}$ × ٢^{ر}]

= (س − ١ + ٢)^{٥٠} = (١ + س)^{٥٠}

∴ معامل س^{١٢} = ^{٥٠}ق$_{١٢}$

(٣) (١ + س + س^{٢} + س^{٣})^{ن} = ((١ + س)

+ س^{٢} (١ + س))^{ن}

= (١ + س)^{ن} (١ + س^{٢})^{ن}

الحد العام = ح$_{ر+١}$ × ح$_{ك+١}$

= ^{ن}ق$_{ر}$ س^{ر} × ^{ن}ق$_{ك}$ س^{٢ك}

= ^{ن}ق$_{ر}$ × ^{ن}ق$_{ك}$ × س$^{ر+٢ك}$

بوضع ر + ٢ ك = ٤

∴

ر	٠	٢	٤
ك	٢	١	٠

∴ معامل س^{٤} = ^{ن}ق$_{٠}$ × ^{ن}ق$_{٢}$ + ^{ن}ق$_{٢}$

× ^{ن}ق$_{١}$ + ^{ن}ق$_{٤}$ × ^{ن}ق$_{٠}$

= ^{ن}ق$_{٢}$ + ^{ن}ق$_{٢}$ ^{ن}ق$_{١}$ + ^{ن}ق$_{٤}$

(٤) (١ + س^{١٢}) (١ + س^{٢٤}) (١ + س^{٢})^{١٢}

= (١ + س^{١٢} + س^{٢٤} + س^{٣٦}) (١ + س^{٢})^{١٢}

، ∵ الحد العام في مفكوك (١ + س^{٢})^{١٢} هو

ح$_{ر+١}$ = ^{١٢}ق$_{ر}$ × س^{٢ر}

∴ (١ + س^{١٢} + س^{٢٤} + س^{٣٦}) × ^{١٢}ق$_{ر}$ س^{٢ر}

= ^{١٢}ق$_{ر}$ س^{٢ر} + ^{١٢}ق$_{ر}$ س$^{٢ر+١٢}$

+ ^{١٢}ق$_{ر}$ س$^{٢ر+٢٤}$ + ^{١٢}ق$_{ر}$ س$^{٢ر+٣٦}$

، ∵ ٢ ر = ٢٤ عندما ر = ١٢

، ٢ ر + ١٢ = ٢٤ عندما ر = ٦

، ٢ ر + ٢٤ = ٢٤ عندما ر = ٠

، ٢ ر + ٣٦ = ٢٤ عندما ر = −٦ (مرفوض)

∴ معامل س^{٢٤} في المفكوك = ^{١٢}ق$_{١٢}$

+ ^{١٢}ق$_{٦}$ + ^{١٢}ق$_{٠}$

= ^{١٢}ق$_{٦}$ + ٢

(٥) (١ − $\frac{١}{س}$)^{٨} (س + ١)^{٨} = ($\frac{س - ١}{س}$)^{٨} (س + ١)^{٨}

= $\frac{(١ - س^{٢})^{٨}}{س^{٨}}$

ح$_{ر+١}$ = س$^{-٨}$ × ^{٨}ق$_{ر}$ × (−س^{٢})^{ر}

= (−١)^{ر} × ^{٨}ق$_{ر}$ × س$^{٢ر-٨}$

بوضع ٢ ر − ٨ = ٠   ∴ ر = ٤

∴ الحد الخالي من س = (−١)^{٤} × ^{٨}ق$_{٤}$ = ^{٨}ق$_{٤}$

(٦) بفرض أن : ح$_{ر+١}$ هو الحد العام في مفكوك

(١ + س)^{٢ن}

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٢ن}ق$_{ر}$ × س^{ر} بوضع ر = ن

∴ أ = ^{٢ن}ق$_{ن}$

، بفرض أن : ح$_{ك+١}$ هو الحد العام في مفكوك

(١ + س)$^{٢ن-١}$

∴ ح$_{ك+١}$ = $^{٢ن-١}$ق$_{ر}$ × س^{ر}

١٦

٢ ح٥ = ح٤ + ح٦ بالقسمة على ح٥

٢ = ح٤/ح٥ + ح٦/ح٥

٢ = ٤/(٨ − ٤ + ١) (١/س) + (٨ − ٥ + ١)/٥ × س/١

٢ = ٤/(٥ س) + ٤ س/٥ بالضرب × ٥ س

١٠ س = ٤ + ٤ س²

٤ س² − ١٠ س + ٤ = صفر

∴ س = ٢ أو س = ١/٢

١٧

١٢ ح٣ + ١٠ ح٤ + ح٥ = ٠ بالقسمة على ح٤

١٢ ح٣/ح٤ + ١٠ + ح٥/ح٤ = ٠

١٢ × ٣/(١٥ − ٣ + ١) × ٢ س/(−٣) + ١٠ + (١٥ − ٤ + ١)/٤

× (−٣)/(٢ س) = ٠

−٢ س + ١٠ + (−٩)/(٢ س) = ٠ بالضرب × (−٢ س)

٤ س² − ٢٠ س + ٩ = ٠

∴ س = ٩/٢ أو س = ١/٢

١٨

الحد الأوسط = ح(١٢/٢ + ١) = ح٧

ح(ر + ١) = ¹²قر (٣ س/٢)^(١٢ − ر) (٢/(٣ س²))^ر

= ¹²قر (٣/٢)^(١٢ − ر) (٢/٣)^ر س^(١٢ − ر − ٢ر)

بوضع ١٢ − ٣ ر = −٣ منها ر = ٥

∴ ح٦ هو الحد الذي يحتوي على س^(−٣)

ح٧/ح٦ = (١٢ − ٦ + ١)/٦ × (٣ س/٢)/(٢/(٣ س²)) = ١٤/(٢٧ س³)

إذا كانت: ح٧/ح٦ = ٧/٤ فإن: ١٤/٢٧ × ١/س³ = ٧/٤

∴ س³ = ٨/٢٧ ∴ س = ٢/٣

③ |ن − ١٩ في حالة ن = ٢٣

∴ |٤ = ٢٤

في حالة ن = ١٤

∴ |١٤ − ١٩ غير ممكنة.

٢٥

ح٥ = ح٦ ∴ ح٦/ح٥ = ١

∴ (ن − ٥ + ١)/٥ × س/١ = ١

(ن − ٤) س = ٥ (١)

ح٤/ح٢ = ٢٥/٣ ، ح٤/ح٣ × ح٣/ح٢ = ٢٥/٣

(ن − ٣ + ١)/٣ × س/١ × (ن − ٢ + ١)/٢ × س/١ = ٢٥/٣

(ن − ٢) (ن − ١) س² = ٥٠ (٢)

بقسمة (٢) ÷ مربع (١):

(ن − ٢) (ن − ١) س²/((ن − ٤)² س²) = ٥٠/٢٥

(ن² − ٣ ن + ٢)/(ن² − ٨ ن + ١٦) = ٢/١

٢ ن² − ١٦ ن + ٣٢ = ن² − ٣ ن + ٢

ن² − ١٣ ن + ٣٠ = ٠

ن = ١٠ أو ن = ٣ (مرفوض)

∴ من (١): (١٠ − ٤) س = ٥ ∴ س = ٥/٦

٢٦

ح٢ هو وسطًا حسابيًا بين ح١ ، ح٣

٢ ح٢ = ح١ + ح٣ بالقسمة على ح٢

٢ = ح١/ح٢ + ح٣/ح٢

٢ = ١/(ن − ١ + ١) × ص/س + (ن − ٢ + ١)/٢ × س/ص

في حالة س = ٢ ص ← ص/س = ١/٢

∴ ٢ = ١/ن × ٢/١ + (ن − ١)/٢ × ١/٢

١٩

ح٣/ح٤ = ١/٤ (٣/(٨ − ٣ + ١)) × س/ص = ١/٤

س/ص = ١/٢ منها ص = ٢ س (١)

الحد الأوسط = ح(٨/٢ + ١) = ح٥ ∴ ح٥ = ١١٢٠

∴ ⁸ق٤ س⁴ ص⁴ = ١١٢٠ س⁴ ص⁴ = ١٦

∴ س ص = ٢ (٢)

(والسالب مرفوض لأن س ، ص لهما نفس الإشارة من (١))

من (١) ، (٢): ٢ س² = ٢ س² = ١

∴ س = ± ١ ومنها ص = ± ٢

٢٠

ح٥ = ٦ ح٤ ∴ ح٥/ح٤ = ٦

(ن − ٤ + ١)/٤ × ٢ س/٣ = ٦ (ن − ٣) س/٦ = ٦

س (ن − ٣) = ٣٦ (١)

ح٨ = ٣ ح٧ ح٨/ح٧ = ٣

(ن − ٧ + ١)/٧ × ٢ س/٣ = ٣

س (ن − ٦) = ٦٣/٢ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢): (ن − ٣)/(ن − ٦) = ٨/٧

٨ ن − ٤٨ = ٧ ن − ٢١

∴ ن = ٢٧

س = ٣٦/(٢٧ − ٣) = ٣/٢

٢١

ح٣ = ١٧ ⁿق٢ × س² = ١٧ (١)

ن (ن − ١) س² = ٢٤

٣ ح٣ × ح٥ = ٥٤٤

٢ = ٢/ن + (ن − ١)/٤ بالضرب × ٤ ن

٨ ن = ٨ + ن² − ن

∴ ن² − ٩ ن + ٨ = ٠ ∴ (ن − ٨) (ن − ١) = ٠

∴ ن = ٨ أو ن = ١ (مرفوض)

٢٧

① ح(ر + ١) = ²ⁿقر (س²)^(٢ن − ر) (١/(٢ س))^ر

= ²ⁿقر × (١/٢)^ر س^(٤ن − ٢ر − ر)

بوضع: ٦ ن − ٣ ر = ٠ ر = ٢ ن

∴ الحد الخالي من س هو ح(٢ن + ١)

② في حالة ن = ٤ ، س = ١

الحد الخالي من س هو ح(٢ × ٤ + ١) = ح٩

، الحد الأوسط = ح((٢ × ٤)/٢ + ١) = ح٧

النسبة بين الحد الخالي من س ، الحد الأوسط

ح٩/ح٧ = ح٩/ح٨ × ح٨/ح٧ عند س = ١

= (١٢ − ٨ + ١)/٨ × (١/٢)/١ × (١٢ − ٧ + ١)/٧ × (١/٢)/١ = ١٥/١١٢

٢٨

الحدان الأوسطان هما: ح((٢ن − ١ + ١)/٢) = حن

، ح((٢ن − ١ + ٢)/٢) = ح(ن + ١)

∵ حن = ح(ن + ١) ∴ ح(ن + ١)/حن = ١

∴ ((٢ ن − ١) − ن + ١)/ن × (أ)/(ب س) = ١

ب س = أ ∴ س = أ/ب

(٢ س + أ/ب)^١٠ = ٢^١٠ ∴ ٢ س + أ/ب = ± ٢

٢ (أ/ب) + أ/ب = ± ٢

أ/ب = ± ٢ ∴ أ = ± ٢ ب

٣ × ⁿق١ س × ⁿق٣ س³ = ٥٤٤

٣ن × ن (ن − ١) (ن − ٢)/(٣ × ٢ × ١) س⁴ = ٥٤٤

ن² (ن − ١) (ن − ٢) س⁴ = ١٠٨٨ (٢)

بتربيع طرفي (١) وقسمة (٢) على (١)

ن² (ن − ١) (ن − ٢) س⁴/(ن² (ن − ١)² س⁴) = ١٠٨٨/(٣٤)²

(ن − ٢)/(ن − ١) = ١٦/١٧ ∴ ن = ١٨

بالتعويض في (١): ١٨ × ١٧ س² = ٣٤

∴ س² = ١/٩ ∴ س = ± ١/٣

٢٢

ح٩ = ح١٠ ∴ ح١٠/ح٩ = ١

(ن − ٩ + ١)/٩ × (٢ س)/(٣/س²) = ١

(ن − ٨)/(٦ س³) = ١ ← ن − ٨ = ٦ س³ (١)

ح٦/ح٧ = ٨/١٥ ٦/(ن − ٦ + ١) × (٣/س²)/(٢ س) = ٨/١٥

(٤ س³)/(ن − ٥) = ٨/١٥ ← ٢ (ن − ٥) = ١٥ س³ (٢)

من (١) ÷ (٢): (ن − ٨)/(٢ (ن − ٥)) = ٦ س³/(١٥ س³) = ٢/٥

٤ ن − ٢٠ = ٥ ن − ٤٠ ن = ٢٠

ح(ر + ١) = ²⁰قر (٢ س)^(٢٠ − ر) (٣/س²)^ر

ح(ر + ١) = (²⁰قر × ٢^(٢٠ − ر) × ٣^ر) س^(٢٠ − ٣ر)

بوضع ٢٠ − ٣ ر = ٠

∴ ر = ٢٠/٣ ∉ ص⁺

٢٩

ح٧/ح٦ = ١١/٢٤

(ن − ٦ + ١)/٦ × (٢/(٣ س))/(٣ س/٢) = ١١/٢٤

(ن − ٥) × ٤/(٩ س²) = ١١/٤ (١)

ح٦/ح٥ = ٢٤/١٠ = ٢/٥

(ن − ٥ + ١)/٥ × (٢/(٣ س))/(٣ س/٢) = ٢/٥

(ن − ٤) ٤/(٩ س²) = ٣ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢): (ن − ٥)/(ن − ٤) = ١١/١٢

١٢ ن − ٦٠ = ١١ ن − ٤٤

ن = ١٦ بالتعويض في (١): ١١ × ٤/(٩ س²) = ١١/٤

٩ س² = ١٦ س = ± ٤/٣

٣٠

نفرض أن الحدود هي حر ، حر+١ ، حر+٢

معامل حر+١/معامل حر = (٢٧ − ر + ١)/ر × ك = ٥/١٤

(٢٨ − ر) ك = ٥/١٤ ر (١)

معامل حر+٢/معامل حر+١ = (٢٧ − (ر + ١) + ١)/(ر + ١) × ك = ٢/٥

(٢٧ − ر) ك = ٢/٥ (ر + ١) (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢): (٢٨ − ر)/(٢٧ − ر) = ٢٥ ر/(٢٨ (ر + ١))

ر² − ٢٧ ر + ١٤٠ = ٠

(ر − ٧) (ر − ٢٠) = ٠

ر = ٧ من (١): ك = ٣/١٤ (مرفوض)

ر = ٢٠ من (١): ك = ١

٢٣

ث٥ = ح٥ × ح٦

(ⁿق٤ س⁴)² = ⁿق٤ س⁴ × ⁿق٥ س⁵ (٢)

(ⁿق٤)² س⁸ = ⁿق٤ × ⁿق٥ س⁹

عند س = ٥/٤

(ⁿق٤)² = ⁿق٤ × ⁿق٥ × ٥/٤ [illegible]

= ن × ن (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣)/(٤ × ٣ × ٢ × ١) × ٥/٤

∴ ١٠ (ن − ١) = ٣ (ن − ٢) (ن − ٣)

١٠ ن − ١٠ = ٣ ن² − ١٥ ن + ١٨

٣ ن² − ٢٥ ن + ٢٨ = ٠

∴ ن = ٧ أو ن = ٤/٣ (مرفوض)

٢٤

① معامل ح١٠ وسطًا حسابيًا بين معامل ح٩ ، معامل ح١١ (١)

∴ ٢ (معامل ح١٠) = معامل ح٩ + معامل ح١١

بالقسمة على معامل ح١٠ (٢)

٢ = معامل ح٩/معامل ح١٠ + معامل ح١١/معامل ح١٠

٢ = ٩/(ن − ٩ + ١) + (ن − ١٠ + ١)/١٠

٢ = ٩/(ن − ٨) + (ن − ٩)/١٠ بالضرب × ١٠ (ن − ٨)

٢٠ (ن − ٨) = ٩٠ + (ن − ٩) (ن − ٨)

٢٠ ن − ١٦٠ = ٩٠ + ن² − ١٧ ن + ٧٢

ن² − ٣٧ ن + ٣٢٢ = ٠

ن = ٢٣ ∴ ن = ١٤

② [illegible]

الحدود هي ح١ ، ح١١ ، ح١٢ [illegible]

ح(ر + ١) = [illegible]

= [illegible]

، بوضع ٢٧ − ٣ ر = ٠ ∴ ر = ٩

الحد الخالي من س هو ح١٠ = [illegible]

٣١

نفرض أن الحدود المتتالية هي حر ، حر+١ ، حر+٢

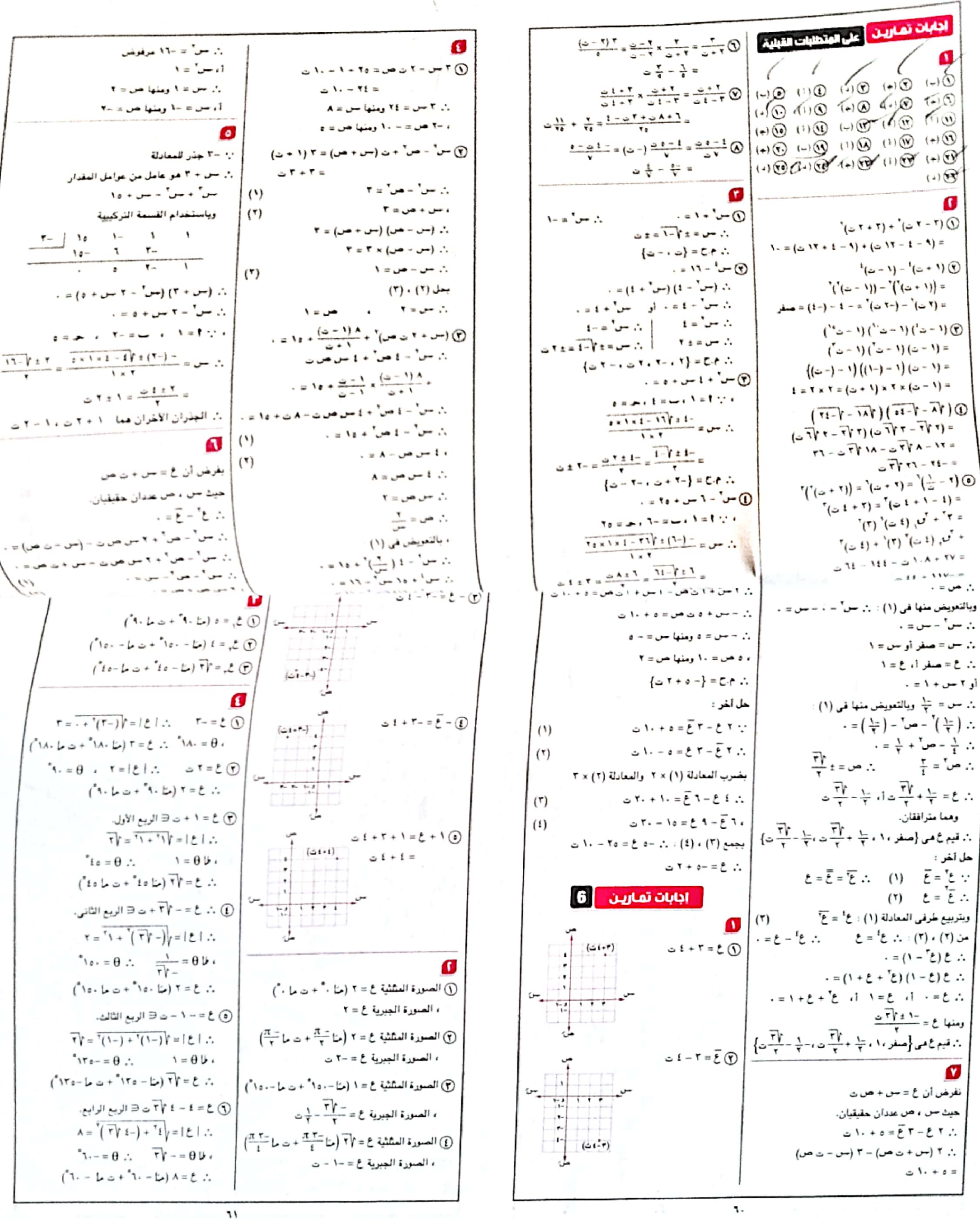
معامل حر+١/معامل حر = [illegible]

[illegible]

٣٢

[illegible]


إجابات تمارين
الوحدة
2
الأعـــداد المركبـــة



إجابات تمارين على المتطلبات القبلية

1

① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (ب)
⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (جـ) ⑨ (أ) ⑩ (د)
⑪ (أ) ⑫ (ب) ⑬ (ب) ⑭ (أ) ⑮ (جـ)
⑯ (جـ) ⑰ (أ) ⑱ (أ) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)
㉑ (جـ) ㉒ (أ) ㉓ (د) ㉔ (ب) ㉕ (د) ㉖ (د)

2

① (٢ − ٣ ت)² + (٢ + ٣ ت)²
= (٤ − ١٢ ت − ٩) + (٤ + ١٢ ت − ٩) = −١٠

② (١ + ت)⁴ − (١ − ت)⁴
= ((١ + ت)²)² − ((١ − ت)²)²
= (٢ ت)² − (−٢ ت)² = −٤ − (−٤) = صفر

③ (١ − ت)(١ − ت²)(١ − ت³)
= (١ − ت)(١ − ت²)(١ − ت³)
= (١ − ت)(١ − (−١))(١ − (−ت))
= (١ − ت) × ٢ × (١ + ت) = ٢ × ٢ = ٤

④ (√٨ − √−١٨)(√٣ − √−٢٤)
= (٢√٢ − ٣√٢ ت)(√٣ − ٢√٦ ت)
= −١٢ − ٨√٣ ت − ١٨√٣ ت − ٣٦
= −٢٤ − ٣٦√٣ ت

⑤ (٢ − ١/ت)² = (٢ + ت)² = ((٢ + ت)²)²
= (٤ + ٤ ت − ١)² = (٣ + ٤ ت)²
= ٣² + ٢ (٣)(٤ ت) + (٤ ت)²
= ٢٧ + ١٠٨ − ١٤٤ − ٦٤ ...
= −١١٧ + ٤٤ ت

∴ ص = ٠
وبالتعويض منها فى (١) : ∴ س² = −س = ٠
∴ س² − س = ٠
∴ س = صفر أو س = ١
∴ ع = صفر أ، ع = ١
أو ٢ س + ١ = ٠
∴ س = −١/٢ وبالتعويض منها فى (١) :
∴ (−١/٢)² − ص² − (−١/٢) = ٠
∴ ١/٤ − ص² + ١/٢ = ٠
∴ ص² = ٣/٤ ∴ ص = ± √٣/٢
∴ ع = −١/٢ + √٣/٢ ت أ، −١/٢ − √٣/٢ ت
وهما مترافقان.
∴ قيم ع هى {صفر ، ١ ، −١/٢ + √٣/٢ ت ، −١/٢ − √٣/٢ ت}

حل آخر :
∵ ع² = ع̄ (١) ∴ ع̄ = ع̄² = ع
∴ ع̄ = ع² (٢)
وبتربيع طرفى المعادلة (١) : ع⁴ = ع̄² (٣)
من (٢) ، (٣) : ∴ ع⁴ = ع ∴ ع⁴ − ع = ٠
∴ ع (ع³ − ١) = ٠
∴ ع (ع − ١)(ع² + ع + ١) = ٠
∴ ع = ٠ أ، ع = ١ أ، ع² + ع + ١ = ٠
ومنها ع = (−١ ± √٣ ت)/٢
∴ قيم ع هى {صفر ، ١ ، −١/٢ + √٣/٢ ت ، −١/٢ − √٣/٢ ت}

7

نفرض أن ع = س + ص ت
حيث س ، ص عددان حقيقيان.
∴ ٢ ع − ٣ ع̄ = ٥ + ١٠ ت
∴ ٢ (س + ص ت) − ٣ (س − ص ت)
= ٥ + ١٠ ت

⑥ ٣/(٢ + ت) × (٢ − ت)/(٢ − ت) = ٣ (٢ − ت)/٥
= ٦/٥ − ٣/٥ ت

⑦ (٢ + ت)/(٢ − ت) = (٢ + ت)/(٢ − ت) × (٢ + ت)/(٢ + ت)
= (٤ + ٤ ت − ١)/٥ = ٣/٥ + ٤/٥ ت

⑧ (١ − ٥ ت)/(٧ ت) = (١ − ٥ ت)/٧ × (− ت) = (− ت − ٥)/٧
= −٥/٧ − ١/٧ ت

3

① س² + ١ = ٠ ∴ س² = −١
∴ س = ± √−١ = ± ت
∴ م.ح = {ت ، −ت}

② س⁴ − ١٦ = ٠
∴ (س² − ٤)(س² + ٤) = ٠
∴ س² − ٤ = ٠ أو س² + ٤ = ٠
∴ س² = ٤ | ∴ س² = −٤
∴ س = ± ٢ | ∴ س = ± √−٤ = ± ٢ ت
∴ م.ح = {٢ ، −٢ ، ٢ ت ، −٢ ت}

③ س² + ٤ س + ٥ = ٠
∵ أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٥
∴ س = (−٤ ± √(١٦ − ٤ × ١ × ٥))/(٢ × ١)
= (−٤ ± √−٤)/٢ = (−٤ ± ٢ ت)/٢ = −٢ ± ت
∴ م.ح = {−٢ + ت ، −٢ − ت}

④ س² − ٦ س + ٢٥ = ٠
∵ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٢٥
∴ س = (−(−٦) ± √(٣٦ − ٤ × ١ × ٢٥))/(٢ × ١)
= (٦ ± √−٦٤)/٢ = (٦ ± ٨ ت)/٢ = ٣ ± ٤ ت

∴ ٢ س + ٢ ص ت − ٣ س + ٣ ص ت = ٥ + ١٠ ت
∴ − س + ٥ ص ت = ٥ + ١٠ ت
∴ − س = ٥ ومنها س = −٥
، ٥ ص = ١٠ ومنها ص = ٢
∴ م.ح = {−٥ + ٢ ت}

حل آخر :
∵ ٢ ع − ٣ ع̄ = ٥ + ١٠ ت (١)
∴ ٢ ع̄ − ٣ ع = ٥ − ١٠ ت (٢)
بضرب المعادلة (١) × ٢ والمعادلة (٢) × ٣
∴ ٤ ع − ٦ ع̄ = ١٠ + ٢٠ ت (٣)
، ٦ ع̄ − ٩ ع = ١٥ − ٣٠ ت (٤)
بجمع (٣) ، (٤) : ∴ −٥ ع = ٢٥ − ١٠ ت
∴ ع = −٥ + ٢ ت

إجابات تمارين 6

1

① ع = ٣ + ٤ ت

② ع̄ = ٣ − ٤ ت

③ − ع = −٣ − ٤ ت

④ − ع̄ = −٣ + ٤ ت

⑤ ١ + ع = ١ + ٣ + ٤ ت
= ٤ + ٤ ت

2

① الصورة المثلثية ع = ٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°)
، الصورة الجبرية ع = ٢

② الصورة المثلثية ع = ٢ (جتا π/٢ + ت جا π/٢)
، الصورة الجبرية ع = ٢ ت

③ الصورة المثلثية ع = ١ (جتا −١٥٠° + ت جا −١٥٠°)
، الصورة الجبرية ع = −√٣/٢ − ١/٢ ت

④ الصورة المثلثية ع = √٢ (جتا −٣π/٤ + ت جا −٣π/٤)
، الصورة الجبرية ع = −١ − ت

4

① ٣ س − ٢ ت ص = ٢٥ − ١ − ١٠ ت
= ٢٤ − ١٠ ت
∴ ٣ س = ٢٤ ومنها س = ٨
، −٢ ص = −١٠ ومنها ص = ٥

② س² − ص² + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت)
= ٣ + ٣ ت
∴ س² − ص² = ٣ (١)
، س + ص = ٣ (٢)
∴ (س − ص)(س + ص) = ٣
∴ (س − ص) × ٣ = ٣
∴ س − ص = ١ (٣)
بحل (٢) ، (٣)
∴ س = ٢ ، ص = ١

③ (س + ٢ ص ت)² + ٨ (١ − ت)/(١ + ت) + ١٥ = ٠
∴ س² − ٤ ص² + ٤ س ص ت
+ ٨ (١ − ت)/(١ + ت) × (١ − ت)/(١ − ت) + ١٥ = ٠
∴ س² − ٤ ص² + ٤ س ص ت − ٨ ت + ١٥ = ٠
∴ س² − ٤ ص² + ١٥ = ٠ (١)
، ٤ س ص − ٨ = ٠ (٢)
∴ ٤ س ص = ٨
∴ س ص = ٢
∴ ص = ٢/س
، بالتعويض فى (١)
∴ س² − ٤ (٢/س)² + ١٥ = ٠
∴ س⁴ + ١٥ س² − ١٦ = ٠

∴ س² = −١٦ مرفوض
أ، س² = ١
∴ س = ١ ومنها ص = ٢
أ، س = −١ ومنها ص = −٢

5

∵ −٣ جذر للمعادلة
∴ س + ٣ هو عامل من عوامل المقدار
س³ + س² − س + ١٥
وباستخدام القسمة التركيبية

١	١	−١	١٥	−٣
	−٣	٦	−١٥	
١	−٢	٥	٠	

∴ (س + ٣)(س² − ٢ س + ٥) = ٠
∴ س² − ٢ س + ٥ = ٠
∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٥
∴ س = (−(−٢) ± √(٤ − ٤ × ١ × ٥))/(٢ × ١) = (٢ ± √−١٦)/٢
= (٢ ± ٤ ت)/٢ = ١ ± ٢ ت
∴ الجذران الآخران هما ١ + ٢ ت ، ١ − ٢ ت

6

بفرض أن ع = س + ت ص
حيث س ، ص عددان حقيقيان.
∴ ع² = ع̄
∴ س² − ص² + ٢ س ص ت = س − ص ت
∴ س² − ص² + ٢ س ص ت − س + ص ت = ٠
∴ س² − ص² − س = ٠ (١)

3

① ع₁ = ٥ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)
② ع₂ = ٤ (جتا −١٥٠° + ت جا −١٥٠°)
③ ع₃ = ٣√٢ (جتا −٤٥° + ت جا −٤٥°)

4

① ع = −٣ ∴ |ع| = √((−٣)² + ٠) = ٣
، θ = ١٨٠° ∴ ع = ٣ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

② ع = ٢ ت ∴ |ع| = ٢ ، θ = ٩٠°
∴ ع = ٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

③ ع = ١ + ت ∈ الربع الأول.
∴ |ع| = √(١² + ١²) = √٢
، ظا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°
∴ ع = √٢ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

④ ∴ ع = −√٣ + ت ∈ الربع الثانى.
∴ |ع| = √((−√٣)² + ١²) = ٢
، ظا θ = ١/−√٣ ∴ θ = ١٥٠°
∴ ع = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

⑤ ع = −١ − ت ∈ الربع الثالث.
∴ |ع| = √((−١)² + (−١)²) = √٢
، ظا θ = ١ ∴ θ = −١٣٥°
∴ ع = √٢ (جتا −١٣٥° + ت جا −١٣٥°)

⑥ ع = ٤ − ٤√٣ ت ∈ الربع الرابع.
∴ |ع| = √(٤² + (−٤√٣)²) = ٨
، ظا θ = −√٣ ∴ θ = −٦٠°
∴ ع = ٨ (جتا −٦٠° + ت جا −٦٠°)

(٧) $ع = \frac{-٤}{\sqrt{٣}+ت} \times \frac{\sqrt{٣}-ت}{\sqrt{٣}-ت}$

$= -\sqrt{٣} + ت \in$ الربع الثانى.

$\therefore |ع| = \sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (١)^٢} = ٢$

، $\text{ظا } θ = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore θ = ١٥٠^\circ$

$\therefore ع = ٢(\text{جتا } ١٥٠^\circ + \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

(٨) $ع = -\sqrt{٣} + ٤ت \in$ الربع الثانى.

$\therefore |ع| = \sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٩}$

، $\text{ظا } θ = \frac{-٤}{\sqrt{٣}}$

$\therefore θ = ١٨٠^\circ + \text{ظا}^{-١}\left(\frac{-٤}{\sqrt{٣}}\right) = ١١٣^\circ ٢٤' ٤٨''$

$\therefore ع = \sqrt{١٩}(\text{جتا } ١١٣^\circ ٢٤' ٤٨''$

$+ \text{ت جا } ١١٣^\circ ٢٤' ٤٨'')$

٥

(١) $ع = \frac{٨}{\sqrt{٣}+ت} \times \frac{\sqrt{٣}-ت}{\sqrt{٣}-ت} = \frac{٨(\sqrt{٣}-ت)}{٣+١}$

$= ٢(\sqrt{٣}-ت) = ٢\sqrt{٣} - ٢ت$ (الربع الرابع)

$\therefore |ع| = \sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + (-٢)^٢} = ٤$

، $\text{ظا } θ = \frac{-٢}{٢\sqrt{٣}}$ $\therefore θ = -٣٠^\circ$

$\therefore ع = ٤(\text{جتا } -٣٠^\circ + \text{ت جا } -٣٠^\circ)$

(٢) $ع = \frac{٢-٢ت}{٢ت} \times \frac{-٢ت}{-٢ت} = \frac{-٤-٤ت}{٤} = -١-ت$

(الربع الثالث)

$\therefore |ع| = \sqrt{٢}$ ، $\text{ظا } θ = ١$

$\therefore θ = -١٣٥^\circ$

$\therefore ع = \sqrt{٢}(\text{جتا } -١٣٥^\circ + \text{ت جا } -١٣٥^\circ)$

(٢) $ع = \frac{١+\text{ت ظا } θ}{١-\text{ت ظا } θ} \times \frac{١+\text{ت ظا } θ}{١+\text{ت ظا } θ}$

$= \frac{١-\text{ظا}^٢ θ + ٢\text{ت ظا } θ}{١+\text{ظا}^٢ θ}$

$= \text{جتا}^٢ θ (١ - \text{ظا}^٢ θ + ٢\text{ت ظا } θ)$

$= (\text{جتا}^٢ θ - \text{جا}^٢ θ) + ٢\text{ت جا } θ \text{ جتا } θ$

$= \text{جتا } ٢θ + \text{ت جا } ٢θ$

(٣) $ع = \frac{\text{جا } θ - \text{ت جتا } θ}{\text{جا } \frac{θ}{٢} + \text{ت جتا } \frac{θ}{٢}}$

$= \frac{\text{جتا}(θ - ٩٠^\circ) + \text{ت جا}(θ - ٩٠^\circ)}{\text{جتا}(٩٠^\circ - \frac{θ}{٢}) + \text{ت جا}(٩٠^\circ - \frac{θ}{٢})}$

$= \text{جتا}\left(\frac{٣θ}{٢} - ١٨٠^\circ\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٣θ}{٢} - ١٨٠^\circ\right)$

١١

(١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ (\text{جتا}(أ + ب + أ - ب)$

$+ \text{ت جا}(أ + ب + أ - ب))$

$= ل_١ ل_٢ (\text{جتا } ٢أ + \text{ت جا } ٢أ)$

(٢) $ع_١ = \frac{٣}{٤}(\text{جتا } ١٥٠^\circ - \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

$= \frac{٣}{٤}(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ١٢ \times \frac{٣}{٤}(\text{جتا}(١٢٠^\circ - ١٥٠^\circ)$

$+ \text{ت جا}(١٢٠^\circ - ١٥٠^\circ))$

$= ٩(\text{جتا } -٣٠^\circ + \text{ت جا } -٣٠^\circ)$

(٣) $ع_١ = -٢(\text{جتا } \frac{٣π}{٤} - \text{ت جا } \frac{٣π}{٤})$

$= ٢(-\text{جتا } \frac{٣π}{٤} + \text{ت جا } \frac{٣π}{٤}) = ٢(\text{جتا } \frac{π}{٤} + \text{ت جا } \frac{π}{٤})$

، $ع_٢ = ٨(\text{جتا } \frac{π}{٤} + \text{ت جا } \frac{π}{٤}) = ٨(\text{جتا } \frac{π}{٤} + \text{ت جا } \frac{π}{٤})$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ٢ \times ٨ (\text{جتا}(\frac{π}{٤} + \frac{π}{٤})$

$+ \text{ت جا}(\frac{π}{٤} + \frac{π}{٤}))$

$= ١٦(\text{جتا } \frac{π}{٢} + \text{ت جا } \frac{π}{٢})$

(٣) $ع = \frac{٥ - \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٢ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ٢ت}{\sqrt{٣} + ٢ت}$

$= \frac{٥\sqrt{٣} + ١٠ت - ٣ت + ٢\sqrt{٣}}{٣ + ٤}$

$= \frac{٧\sqrt{٣} + ٧ت}{٧} = \sqrt{٣} + ت$ (الربع الأول)

$\therefore |ع| = ٢$ ، $\text{ظا } θ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore θ = ٣٠^\circ$

$\therefore ع = ٢(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$

٦

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

(٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب)

(١٠) أولاً: (ب) ثانياً: (أ) ثالثاً: (ب) (١١) (ب)

(١٢) (ب) (١٣) (أ) (١٤) ([illegible]) (١٥) (ب) (١٦) (جـ)

(١٧) (أ) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (د) (٢١) (جـ)

(٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (جـ) (٢٥) (أ) (٢٦) (جـ)

(٢٧) (د) (٢٨) (جـ) (٢٩) (ب) (٣٠) (د) (٣١) (جـ)

(٣٢) (ب) (٣٣) (د) (٣٤) (أ) (٣٥) (أ) (٣٦) (ب)

(٣٧) (د) (٣٨) أولاً: (د) ثانياً: (أ)

(٣٩) (جـ) (٤٠) (جـ) (٤١) (أ) (٤٢) (أ) (٤٣) (ب)

(٤٤) (د) (٤٥) (جـ)

٧

$\because ع = ٢(\text{جتا } \frac{π}{٣} + \text{ت جا } \frac{π}{٣})$

$\therefore -ع = ٢(\text{جتا } \frac{-٢π}{٣} + \text{ت جا } \frac{-٢π}{٣})$

، $\bar{ع} = ٢(\text{جتا } \frac{-π}{٣} + \text{ت جا } \frac{-π}{٣})$

، $\because ١ = \text{جتا } ٠ + \text{ت جا } ٠$

$\therefore \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}(\text{جتا } \frac{-π}{٣} + \text{ت جا } \frac{-π}{٣})$

، $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{٢}(\text{جتا } \frac{π}{٣} + \text{ت جا } \frac{π}{٣})$

٨

$ع = -\sqrt{٣} + ت$

(٤) $ع_١ = $ [illegible] $\text{ت جا } ١٢٠$

$= \text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ$

، $ع_٢ = ٧(\text{جا } ١٢٠^\circ - \text{ت جتا } ١٢٠^\circ)$

$= ٧(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$

$\therefore ع_١ ع_٢$

$= ١ \times ٧(\text{جتا}(٣٠^\circ + ٣٠^\circ) + \text{ت جا}(٣٠^\circ + ٣٠^\circ))$

$= ٧(\text{جتا } ٦٠^\circ + \text{ت جا } ٦٠^\circ)$

(٥) $ع_١ = \sqrt{٣} - ت$ (الربع الرابع)

، $\because |ع_١| = ٢$ $\therefore ع_١ = ٢(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت)$

$= ٢(\text{جتا}(-٣٠^\circ) + \text{ت جا}(-٣٠^\circ))$

، $ع_٢ = ٤(\text{جتا } ١٥٠^\circ + \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ٢ \times ٤ (\text{جتا}(-٣٠^\circ + ١٥٠^\circ)$

$+ \text{ت جا}(-٣٠^\circ + ١٥٠^\circ))$

$= ٨(\text{جتا } ١٢٠^\circ + \text{ت جا } ١٢٠^\circ)$

١٢

(١) $ع_١ = ٣(\text{جتا } ٣θ - \text{ت جا } ٣θ)$

$= ٣(\text{جتا } -٣θ + \text{ت جا } -٣θ)$

، $ع_٢ = ٤(\text{جتا } ٤θ - \text{ت جا } ٤θ)$

$= ٤(\text{جتا } -٤θ + \text{ت جا } -٤θ)$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٣}{٤}(\text{جتا}(-٣θ - (-٤θ))$

$+ \text{ت جا}(-٣θ - (-٤θ)))$

$= \frac{٣}{٤}(\text{جتا } θ + \text{ت جا } θ)$

(٢) $ع_١ = ل(\text{جتا } θ - \text{ت جا } θ)^٢$

$= ل(\text{جتا } -θ + \text{ت جا } -θ)^٢$

$= ل(\text{جتا } -٢θ + \text{ت جا } -٢θ)$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل}{ل}(\text{جتا}(-٢θ - θ) + \text{ت جا}(-٢θ - θ))$

$= \text{جتا}(-٣θ) + \text{ت جا}(-٣θ)$

$\therefore ع = ٢(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت)$

، $\text{ظا } θ = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore θ = ١٥٠^\circ$ (الربع الثانى)

$\therefore ع = ٢(\text{جتا } ١٥٠^\circ + \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

، $-ع = ٢(\text{جتا } -٣٠^\circ + \text{ت جا } -٣٠^\circ)$

، $\bar{ع} = ٢(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

، $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

، $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{٢}(\text{جتا } ١٥٠^\circ + \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

٩

(١) $ع = -٨(\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ)$

$= ٨(-\text{جتا } ٤٥^\circ - \text{ت جا } ٤٥^\circ)$

$= ٨(\text{جتا } -١٣٥^\circ + \text{ت جا } -١٣٥^\circ)$

$\therefore ل = ٨$ ، $θ = -١٣٥^\circ$

(٢) $ع = ٤(\text{جتا } ١٥٠^\circ - \text{ت جا } ١٥٠^\circ)$

$= ٤(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

$\therefore ل = ٤$ ، $θ = -١٥٠^\circ$

(٣) $ع = \text{جا } ٢٤٠^\circ + \text{ت جتا } ٢٤٠^\circ$

$= (\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

$\therefore ل = ١$ ، $θ = -١٥٠^\circ$

(٤) $ع = -٢(\text{جا } ٢١٠^\circ - \text{ت جتا } ٢١٠^\circ)$

$= ٢(-\text{جا } ٢١٠^\circ + \text{ت جتا } ٢١٠^\circ)$

$= ٢(\text{جتا } -٦٠^\circ + \text{ت جا } -٦٠^\circ)$

$\therefore ل = ٢$ ، $θ = -٦٠^\circ$

(٥) $ع = ٢(\text{جا } \frac{٤}{٣}π - \text{ت جتا } \frac{٤}{٣}π)$

[illegible]

(٣) $ع_١ = ١ = ١(\text{جتا } ٠ + \text{ت جا } ٠)$

، $ع_٢ = (\text{جتا } ٢θ + \text{ت جا } ٢θ)^٢ = \text{جتا } ٤θ + \text{ت جا } ٤θ$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \text{جتا}(٠ - ٤θ) + \text{ت جا}(٠ - ٤θ)$

$= \text{جتا}(-٤θ) + \text{ت جا}(-٤θ)$

(٤) $ع_١ = ١٠(\text{جتا } ٣٠٠^\circ - \text{ت جا } ٣٠٠^\circ)$

$= ١٠(\text{جتا } ٦٠^\circ + \text{ت جا } ٦٠^\circ)$

، $ع_٢ = ٢(\text{جا } ٣٠٠^\circ - \text{ت جتا } ٣٠٠^\circ)$

$= ٢(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٠}{٢}(\text{جتا}(٦٠^\circ - (-١٥٠^\circ))$

$+ \text{ت جا}(٦٠^\circ - (-١٥٠^\circ)))$

$= ٥(\text{جتا } ٢١٠^\circ + \text{ت جا } ٢١٠^\circ)$

$= ٥(\text{جتا } -١٥٠^\circ + \text{ت جا } -١٥٠^\circ)$

(٥) $ع_١ = ١٤(\text{جتا } ١٥^\circ + \text{ت جا } ١٥^\circ)^٢$

$= ١٤(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$

، $ع_٢ = ٧(-\text{جا } ٧٥^\circ - \text{ت جتا } ٧٥^\circ)^٢$

$= ٧(\text{جتا } -١٦٥^\circ + \text{ت جا } -١٦٥^\circ)^٢$

$= ٧(\text{جتا } -٣٣٠^\circ + \text{ت جا } -٣٣٠^\circ)$

$= ٧(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٤}{٧}(\text{جتا}(٣٠^\circ - ٣٠^\circ) + \text{ت جا}(٣٠^\circ - ٣٠^\circ))$

$= ٢(\text{جتا } ٠ + \text{ت جا } ٠)$

١٣

(١) $٣(\text{جتا } \frac{٥π}{١٢} + \text{ت جا } \frac{٥π}{١٢}) \times ٤(\text{جتا } \frac{π}{١٢} + \text{ت جا } \frac{π}{١٢})$

$= ١٢(\text{جتا } \frac{π}{٢} + \text{ت جا } \frac{π}{٢}) = ١٢ت$

(٢) $٢(\text{جتا } \frac{π}{١٢} + \text{ت جا } \frac{π}{١٢}) \times \sqrt{٢}(\text{جتا } \frac{π}{٣} - \text{ت جا } \frac{π}{٣})$

$= ٢(\text{جتا } \frac{π}{١٢} + \text{ت جا } \frac{π}{١٢})$

$\times \sqrt{٢}(\text{جتا } \frac{-π}{٣} + \text{ت جا } \frac{-π}{٣})$

$= ٢\sqrt{٢}(\text{جتا } -\frac{١}{٤}π + \text{ت جا } -\frac{١}{٤}π) = ٢ - ٢ت$

(٦) $ع = ١ + \text{ت ظا } ٢٠^\circ = ١ + \text{ت } \frac{\text{جا } ٢٠^\circ}{\text{جتا } ٢٠^\circ}$

$= \frac{١}{\text{جتا } ٢٠^\circ}(\text{جتا } ٢٠^\circ + \text{ت جا } ٢٠^\circ)$

$\therefore ل = \frac{١}{\text{جتا } ٢٠^\circ} = \text{قا } ٢٠^\circ$ ، $θ = ٢٠^\circ$

حل آخر: $ل = |ع| = \sqrt{١ + \text{ظا}^٢ ٢٠^\circ} = \text{قا } ٢٠^\circ$

، $\text{ظا } θ = \frac{ص}{س} = \frac{\text{ظا } ٢٠^\circ}{١} = \text{ظا } ٢٠^\circ$

$\therefore θ = ٢٠^\circ$

(٧) $ع = ل(\text{جتا } θ - \text{ت جا } θ)$

$= ل(\text{جتا } -θ + \text{ت جا } -θ)$

$\therefore$ المقياس $= ل$ ، السعة $= -θ$

(٨) $ع = -ل(\text{جتا } θ + \text{ت جا } θ)$

$= ل(-\text{جتا } θ - \text{ت جا } θ)$

$= ل(\text{جتا}(θ - ١٨٠^\circ) + \text{ت جا}(θ - ١٨٠^\circ))$

$\therefore$ المقياس $= ل$ ، السعة $= (θ - ١٨٠^\circ)$

(٩) $ع = ل(-\text{جتا } θ + \text{ت جا } θ)$

$= ل(\text{جتا}(١٨٠^\circ - θ) + \text{ت جا}(١٨٠^\circ - θ))$

$\therefore$ المقياس $= ل$ ، السعة $= ١٨٠^\circ - θ$

(١٠) $ع = ل(\text{جا } θ - \text{ت جتا } θ)$

$= ل(\text{جتا}(θ - ٩٠^\circ) + \text{ت جا}(θ - ٩٠^\circ))$

$\therefore$ المقياس $= ل$ ، السعة $= (θ - ٩٠^\circ)$

١٠

(١) $ع = \frac{١}{١ + \text{ت ظا } θ} \times \frac{١ - \text{ت ظا } θ}{١ - \text{ت ظا } θ}$

$= \frac{١ - \text{ت ظا } θ}{١ + \text{ظا}^٢ θ} = \frac{\frac{١}{\text{جتا } θ}(\text{جتا } θ - \text{ت جا } θ)}{\text{قا}^٢ θ}$

(٣) $\frac{٢\sqrt{٢}(\text{جتا } \frac{π}{٢} + \text{ت جا } \frac{π}{٢})}{\frac{١}{٢}(\text{جتا } \frac{π}{٤} + \text{ت جا } \frac{π}{٤})}$

$= ٢\sqrt{٢}(\text{جتا } \frac{π}{٤} + \text{ت جا } \frac{π}{٤}) = ٢ + ٢ت$

١٤

في شكل (١): $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٤(\text{جتا } -٢٠^\circ + \text{ت جا } -٢٠^\circ)}{٢(\text{جتا } ١٠٠^\circ + \text{ت جا } ١٠٠^\circ)}$

$= ٢(\text{جتا } -١٢٠^\circ + \text{ت جا } -١٢٠^\circ)$

$= -١ - \sqrt{٣}ت$

في شكل (٢): إذا كانت $ع_١ = ٢(\text{جتا } θ + \text{ت جا } θ)$

فإن: $ع_٢ = ٤(\text{جتا}(٩٠^\circ + θ) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + θ))$

$\therefore \frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٤(\text{جتا}(٩٠^\circ + θ) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + θ))}{٢(\text{جتا } θ + \text{ت جا } θ)}$

$= ٢(\text{جتا}(٩٠^\circ + θ - θ) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + θ - θ))$

$= ٢(\text{جتا } ٩٠^\circ + \text{ت جا } ٩٠^\circ) = ٢ت$

١٥

$ع_١^٤ ع_٢^٢ = [٢(\text{جتا } ١٠^\circ + \text{ت جا } ١٠^\circ)]^٤$

$[٣(\text{جتا } ٤٠^\circ + \text{ت جا } ٤٠^\circ)]^٢$

$= ١٦(\text{جتا } ٤٠^\circ + \text{ت جا } ٤٠^\circ) \times ٩(\text{جتا } ٨٠^\circ + \text{ت جا } ٨٠^\circ)$

$= ١٤٤(\text{جتا } ١٢٠^\circ + \text{ت جا } ١٢٠^\circ) = -٧٢ + ٧٢\sqrt{٣}ت$

١٦

$ع_١ = ١ - \sqrt{٣}ت = ٢(\text{جتا } -٦٠^\circ + \text{ت جا } -٦٠^\circ)$

، $ع_٢ = ١ + ت = \sqrt{٢}(\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ)$

(١) $ع_١ ع_٢ = ٢\sqrt{٢}(\text{جتا } -١٥^\circ + \text{ت جا } -١٥^\circ)$

(٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}(\text{جتا } -١٠٥^\circ + \text{ت جا } -١٠٥^\circ)$

(٣) $(ع_١)^٨ = ٢^٨[\text{جتا}(-٦٠^\circ \times ٨) + \text{ت جا}(-٦٠^\circ \times ٨)]$

$= ٢٥٦[\text{جتا}(-١٢٠^\circ) + \text{ت جا}(-١٢٠^\circ)]$

$\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = 2\,\text{ت جا ن}\theta$ (١)

وفي حالة $\text{س} = \text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta = \text{جتا}-\theta + \text{ت جا}-\theta$

$\therefore \text{س}^{ن} = \text{جتا}-\text{ن}\theta + \text{ت جا}-\text{ن}\theta$

$= \text{جتا ن}\theta - \text{ت جا ن}\theta$

$، \frac{1}{\text{س}^{ن}} = \text{جتا ن}\theta + \text{ت جا ن}\theta$

$\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = -2\,\text{ت جا ن}\theta$ (٢)

من (١)، (٢) : $\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = \pm 2\,\text{ت جا ن}\theta$

37

$ع_1 = 4(\text{جتا}\,2\theta + \text{ت جا}\,2\theta)$

$، ع_2 = 13(\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta)$

$= 13(\text{جتا}-\theta + \text{ت جا}-\theta)$

$\therefore ع_1 ع_2 = 4 \times 13\,(\text{جتا}(2\theta - \theta) + \text{ت جا}(2\theta - \theta))$

$= 52(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$ (الصورة المثلثية)

$= 52\,\text{جتا}\,\theta + 52\,\text{ت جا}\,\theta$

$= 52 \times \frac{12}{13}$

$+ 52\,\text{ت} \times \frac{5}{13}$

$= 48 + 20\,\text{ت}$

(الصورة الجبرية)

$، ع_2^{2} = [13(\text{جتا}-\theta + \text{ت جا}-\theta)]^{2}$

$= 169(\text{جتا}-2\theta + \text{ت جا}-2\theta)$ (الصورة المثلثية)

$= 169\,\text{جتا}-2\theta + 169\,\text{ت جا}-2\theta$

$= 169(2\,\text{جتا}^{2}\theta - 1) - 169\,\text{ت}(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta)$

$= 169 \times \frac{119}{169} - 169\,\text{ت} \times \frac{120}{169}$

$= 119 - 120\,\text{ت}$ (الصورة الجبرية)

38

$ع = 5(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$

$\therefore ع^{-1}$

$= (5(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta))^{-1}$

$= \frac{1}{5}(\text{جتا}-\theta + \text{ت جا}-\theta)$ (الصورة المثلثية)

$= \frac{1}{5}\,\text{جتا}-\theta + \frac{1}{5}\,\text{ت جا}-\theta$

$= \frac{1}{5}\,\text{جتا}\,\theta - \frac{1}{5}\,\text{ت جا}\,\theta = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\,\text{ت}$

(الصورة الجبرية)

$، ع^{-2} = (ع^{-1})^{2} = \frac{1}{25}(\text{جتا}-2\theta + \text{ت جا}-2\theta)$

$= \frac{1}{25}((2\,\text{جتا}^{2}\theta - 1) - \text{ت}(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta))$

$= \frac{-7}{625} + \frac{24}{625}\,\text{ت}$

$(\bar{ع})^{-2} = (5(\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta))^{-2}$

$= (5(\text{جتا}-\theta + \text{ت جا}-\theta))^{-2}$

$= \frac{1}{25}(\text{جتا}\,2\theta + \text{ت جا}\,2\theta)$

$= \frac{1}{25}((2\,\text{جتا}^{2}\theta - 1) + \text{ت}(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta))$

$= \frac{-7}{625} - \frac{24}{625}\,\text{ت}$

حل آخر : $(\bar{ع})^{-2} = (\overline{ع^{-2}}) = \frac{-7}{625} - \frac{24}{625}\,\text{ت}$

39

الطرف الأيمن $= \left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جتا}\frac{\theta}{2}}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{\text{جتا}\frac{-\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{-\theta}{2}}{\text{جتا}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + \text{ت جا}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}\right]^{ن}$

$= \left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \theta) + \text{ت جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)\right)^{ن}$

$= \text{جتا ن}(\frac{\pi}{2} - \theta) + \text{ت جا ن}(\frac{\pi}{2} - \theta) =$ الطرف الأيسر.

40

بوضع $ى = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$\therefore$ الطرف الأيمن

$= \left(\frac{1 + \text{جا}(90^{\circ} - 2\theta) + \text{ت جتا}(90^{\circ} - 2\theta)}{1 + \text{جا}(90^{\circ} - 2\theta) - \text{ت جتا}(90^{\circ} - 2\theta)}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{1 + \text{جتا}\,2\theta + \text{ت جا}\,2\theta}{1 + \text{جتا}\,2\theta - \text{ت جا}\,2\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{2\,\text{جتا}^{2}\theta + 2\,\text{ت جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{2\,\text{جتا}^{2}\theta - 2\,\text{ت جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{2\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)}{2\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta)}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta}{\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta)}\right)^{ن}$

$= (\text{جتا}\,2\theta + \text{ت جا}\,2\theta)^{ن}$

لكن $2\theta = \frac{\pi}{2} - ى$

$= \left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت جا}(\frac{\pi}{2} - ى)\right)^{ن}$

$= \text{جتا ن}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت جا ن}(\frac{\pi}{2} - ى)$

حل آخر :

الطرف الأيمن

$= \left[\frac{\text{جا}^{2}ى - \text{ت}^{2}\,\text{جتا}^{2}ى + \text{جا}\,ى + \text{ت جتا}\,ى}{1 + \text{جا}\,ى - \text{ت جتا}\,ى}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{(\text{جا}\,ى - \text{ت جتا}\,ى)(\text{جا}\,ى + \text{ت جتا}\,ى) + (\text{جا}\,ى + \text{ت جتا}\,ى)}{1 + \text{جا}\,ى - \text{ت جتا}\,ى}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{(\text{جا}\,ى + \text{ت جتا}\,ى)(1 + \text{جا}\,ى - \text{ت جتا}\,ى)}{(1 + \text{جا}\,ى - \text{ت جتا}\,ى)}\right]^{ن}$

$= \left[\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت جا}(\frac{\pi}{2} - ى)\right]^{ن}$

$= \text{جتا ن}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت جا ن}(\frac{\pi}{2} - ى)$

41

الطرف الأيمن $= \text{ت}\left[(1 - \text{ت})^{ن} - (1 + \text{ت})^{ن}\right]$

$= \text{ت}\left[\left(\sqrt{2}(\text{جتا}\frac{-\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{4})\right)^{ن}\right.$

$\left.- \left(\sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4})\right)^{ن}\right]$

$= \text{ت}\left[2^{\frac{ن}{2}}(\text{جتا}\frac{-ن\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{-ن\pi}{4})\right.$

$\left.- 2^{\frac{ن}{2}}(\text{جتا}\frac{ن\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{ن\pi}{4})\right]$

$= \text{ت} \times 2^{\frac{ن}{2}}\left[-2\,\text{ت جا}\frac{ن\pi}{4}\right]$

$= 2^{\frac{ن}{2} + 1}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4}$

$= 2^{\frac{ن + 2}{2}}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4}$

42

نفرض أن : $ع_1 = أ + ب\,\text{ت}$ ، $ع_2 = ج + د\,\text{ت}$

$\therefore ع_1 + ع_2 = (أ + ج) + (ب + د)\,\text{ت}$

$\therefore |ع_1 + ع_2| = \sqrt{(أ + ج)^{2} + (ب + د)^{2}}$

$= \sqrt{أ^{2} + 2أج + ج^{2} + ب^{2} + 2بد + د^{2}}$

$، ع_1 - ع_2 = (أ - ج) + (ب - د)\,\text{ت}$

$\therefore |ع_1 - ع_2| = \sqrt{(أ - ج)^{2} + (ب - د)^{2}}$

$= \sqrt{أ^{2} - 2أج + ج^{2} + ب^{2} - 2بد + د^{2}}$

$\therefore$ الطرف الأيمن =

$|ع_1 + ع_2|^{2} + |ع_1 - ع_2|^{2} = أ^{2} + 2أج + ج^{2}$

$+ ب^{2} + 2بد + د^{2} + أ^{2} - 2أج + ج^{2} + ب^{2}$

$- 2بد + د^{2} = 2أ^{2} + 2ج^{2} + 2ب^{2} + 2د^{2}$

$= 2(أ^{2} + ج^{2} + ب^{2} + د^{2})$

، الطرف الأيسر $= 2(|ع_1|^{2} + |ع_2|^{2})$

$= 2(أ^{2} + ب^{2} + ج^{2} + د^{2})$

$\therefore$ الطرفان متساويان

43

$\because \text{س} + \text{ت ص} = (أ + ب\,\text{ت})^{ن}$

$\therefore |\text{س} + \text{ت ص}| = |(أ + ب\,\text{ت})^{ن}|$

$\therefore \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}} = \sqrt{(أ^{2} + ب^{2})^{ن}}$ بالتربيع

$\therefore \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = (أ^{2} + ب^{2})^{ن}$

حل آخر : $\because \text{س} + \text{ت ص} = (أ + ب\,\text{ت})^{ن}$ (١)

$\therefore \overline{\text{س} + \text{ت ص}} = \overline{(أ + ب\,\text{ت})^{ن}}$

$\therefore \text{س} - \text{ت ص} = (أ - ب\,\text{ت})^{ن}$ (٢)

بضرب (١) × (٢) :

$\therefore \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = [(أ + ب\,\text{ت})(أ - ب\,\text{ت})]^{ن}$

$\therefore \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = (أ^{2} + ب^{2})^{ن}$

44

$\because (\text{جتا س} + \text{ت جا س})^{5} = (\text{جتا س} + \text{ت جا س})^{5}$

$\therefore \text{جتا}\,5\text{س} + \text{ت جا}\,5\text{س} = \text{جتا}^{5}\text{س}$

$+ {}^{5}ق_1\,\text{جتا}^{4}\text{س}\,(\text{ت جا س}) + {}^{5}ق_2\,\text{جتا}^{3}\text{س}\,(\text{ت جا س})^{2}$

$+ {}^{5}ق_3\,\text{جتا}^{2}\text{س}\,(\text{ت جا س})^{3}$

$+ {}^{5}ق_4\,\text{جتا س}\,(\text{ت جا س})^{4} + (\text{ت جا س})^{5}$

$= \text{جتا}^{5}\text{س} + \text{ت}(5\,\text{جتا}^{4}\text{س جا س}) - 10\,\text{جتا}^{3}\text{س جا}^{2}\text{س}$

$- \text{ت}(10\,\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{3}\text{س}) + 5\,\text{جتا س جا}^{4}\text{س} + \text{ت جا}^{5}\text{س}$

بمقارنة الجزء التخيلي

$\therefore \text{جا}\,5\text{س} = 5\,\text{جتا}^{4}\text{س جا س}$

$- 10\,\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{3}\text{س} + \text{جا}^{5}\text{س}$

$\therefore \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{جا س}} = 5\,\text{جتا}^{4}\text{س} - 10\,\text{جتا}^{2}\text{س}$

$(1 - \text{جتا}^{2}\text{س}) + \text{جا}^{4}\text{س}$

$= 5\,\text{جتا}^{4}\text{س} - 10\,\text{جتا}^{2}\text{س}$

$+ 10\,\text{جتا}^{4}\text{س} + (1 - \text{جتا}^{2}\text{س})^{2}$

$= 5\,\text{جتا}^{4}\text{س} - 10\,\text{جتا}^{2}\text{س} + 10\,\text{جتا}^{4}\text{س}$

$+ 1 - 2\,\text{جتا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{4}\text{س}$

$= 16\,\text{جتا}^{4}\text{س} - 12\,\text{جتا}^{2}\text{س} + 1$

45

$(1 + \text{ت})^{ن} = \left[\sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{ن}$

$= 2^{\frac{ن}{2}}\left(\text{جتا}\frac{ن\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{ن\pi}{4}\right)$ الصورة المثلثية.

$= \left(2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جتا}\frac{ن\pi}{4}\right) + \text{ت}\left(2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4}\right)$ الصورة الجبرية

$\therefore أ = 2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جتا}\frac{ن\pi}{4}$ ، $ب = 2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4}$

46

① (أ) ② (د) ③ (ج) ④ (أ)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (أ)

إرشادات لحل رقم 46 :

① $\because |ع_1| = |ع_2| = |ع_3| = 1$

$\therefore |ع_1|^{2} = |ع_2|^{2} = |ع_3|^{2} = 1$

$\therefore ع_1\bar{ع}_1 = ع_2\bar{ع}_2 = ع_3\bar{ع}_3 = 1$ (١)

$، \because \left|\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3}\right| = 1$ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) :

$\therefore \left|\frac{ع_1\bar{ع}_1}{ع_1} + \frac{ع_2\bar{ع}_2}{ع_2} + \frac{ع_3\bar{ع}_3}{ع_3}\right| = 1$

$\therefore |\bar{ع}_1 + \bar{ع}_2 + \bar{ع}_3| = 1$

$\therefore |\overline{ع_1 + ع_2 + ع_3}| = 1$

$\therefore |ع_1 + ع_2 + ع_3| = 1$

② $\because |ع| = |\text{ت}\,ع|$

، ت ع صورة ع بدوران حول (و) بزاوية (90°)

$\therefore (ع + \text{ت}\,ع)$ تمثل بالنقطة جـ

حيث $\overline{\text{وجـ}}$ قطر في المربع و أ جـ ب

$\therefore$ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}|ع| \times |ع|$

$= \frac{1}{2}|ع|^{2}$

③ من الرسم نجد أن $(ع_1 + ع_2)$ تمثل بالنقطة أ حيث $\overline{\text{وأ}}$ قطر في المربع

$، \because$ طول القطر = طول الضلع × $\sqrt{2}$

$\therefore |ع_1 + ع_2| = |ع_1| \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

④ $\because (2\sqrt{2} - \text{ت})^{50} = 3^{49}(أ - ب\,\text{ت})$ (١)

$\therefore (2\sqrt{2} + \text{ت})^{50} = 3^{49}(أ + ب\,\text{ت})$ (٢)

بضرب المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore [(2\sqrt{2} + \text{ت})(2\sqrt{2} - \text{ت})]^{50}$

$= 9^{49}((أ + ب\,\text{ت})(أ - ب\,\text{ت}))$

$(8 + 1)^{50} = 9^{49}(أ^{2} + ب^{2})$

$\therefore 9^{50} = 9^{49}(أ^{2} + ب^{2})$

$\therefore أ^{2} + ب^{2} = 9^{50} \div 9^{49} = 9$

⑤ من الرسم نجد أن : طول القطر الواصل بين $ع_1$ ، $ع_2$ يمثل $|ع_1 - ع_2|$ وباستخدام فيثاغورس نجد أن :

$|ع_1 - ع_2| = \sqrt{(4\sqrt{3})^{2} + (4)^{2}} = 8$

⑥ نفرض أن $ع = \text{س} + \text{ت ص}$

$\because |ع - 4| < |ع - 2|$

$\therefore |(\text{س} - 4) + \text{ت ص}| < |(\text{س} - 2) + \text{ت ص}|$

$\therefore \sqrt{(\text{س} - 4)^{2} + \text{ص}^{2}} < \sqrt{(\text{س} - 2)^{2} + \text{ص}^{2}}$

$\therefore (\text{س} - 4)^{2} < (\text{س} - 2)^{2}$

$\therefore \text{س}^{2} - 8\text{س} + 16 < \text{س}^{2} - 4\text{س} + 4$

$\therefore 4\text{س} > 12 \qquad \therefore \text{س} > 3$

$\therefore$ س يمكن أن تساوى ٤

⑦ $\because ع_1 = \text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}$

$، ع_2 = \text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4}$

$، ع_3 = \text{جتا}\frac{\pi}{8} + \text{ت جا}\frac{\pi}{8}$

، ... وهكذا

$\therefore ع_1 \times ع_2 \times ع_3 \times \dots$ إلى ∞

$= \left(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right)\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4}\right)$

$\left(\text{جتا}\frac{\pi}{8} + \text{ت جا}\frac{\pi}{8}\right) \dots$ إلى ∞

$= \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \dots\right)$

$+ \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \dots\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

«باستخدام مجموع المتتابعة الهندسية»

$= \text{جتا}(\pi) + \text{ت جا}(\pi) = -1$

إجابات تمارين 7

1

① $ل = 2$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ $\therefore -2\text{ت} = 2\,هـ^{-\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

② $ل = 7$ ، $\theta = 0$ $\therefore 7 = 7\,هـ^{\text{صفر}}$

③ $ل = \sqrt{(2\sqrt{3})^{2} + (-2)^{2}} = 4$

$، \because \text{س} > 0$ ، $\text{ص} < 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}$ $\therefore \theta = \frac{-\pi}{6}$

$\therefore 2\sqrt{3} - 2\text{ت} = 4\,هـ^{-\frac{\pi}{6}\text{ت}}$

④ $\frac{8}{\sqrt{2} - \text{ت}} \times \frac{\sqrt{2} + \text{ت}}{\sqrt{2} + \text{ت}} = \frac{8(\sqrt{2} + \text{ت})}{2 - \text{ت}^{2}}$

$= \frac{8(\sqrt{2} + \text{ت})}{4} = 2\sqrt{2} + 2\text{ت}$

$، ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}(\theta + ٤٥^\circ) + \text{ت جا}(\theta + ٤٥^\circ)\right)$

$(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$

$\therefore \left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)^{٦} = \left[\sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٤٥^\circ + \text{ت جا}\,٤٥^\circ)\right]^{٦}$

$= \left[\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}\right]^{٦}$

$= ٨\,هـ^{\frac{٣\pi}{٢}ت} = ٨\,هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

إجابات تمارين 8

١

① $ع^{٣} = ١ = \text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠$

$\therefore ع = \left(\text{جتا}\,\frac{٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi ر}{٣}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠$

$\therefore ع_{١} = ١$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{٤\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٤\pi}{٣}$

$= \text{جتا}\,\frac{-٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{-٢\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٣} = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

② $ع^{٤} = ١ = \text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\frac{٢\pi ر}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi ر}{٤}$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠$ $\quad \therefore ع_{١} = ١$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}$ $\quad \therefore ع_{٢} = ت$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi$

$\therefore ع_{٣} = -١$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = \text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٢}$

$\therefore ع_{٤} = -ت$

③ $ع^{٣} = -١ = \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣}$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_{١} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi$ $\quad \therefore ع_{٢} = -١$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٣}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

④ $ع^{٦} = -١ = \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٦}$

$ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٦}$

$\therefore ع_{١} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}$ $\quad \therefore ع_{٢} = ت$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_{٣} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = \text{جتا}\,\frac{٧\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{٦}$

$= \text{جتا}\,\frac{-٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_{٤} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ٤$:

$\therefore ع_{٥} = \text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٢}$

$\therefore ع_{٥} = -ت$

عند $ر = ٥$:

$\therefore ع_{٦} = \text{جتا}\,\frac{١١\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{١١\pi}{٦}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٦}$

⑤ $ع^{٣} = ت = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣}$

$ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٦}$

$\therefore ع_{١} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_{٢} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢} = \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٢}$

$\therefore ع_{٣} = -ت$

⑥ $ع^{٣} = -ت = \text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣}$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}$

$\therefore ع_{١} = ت$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٧\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{٦}$

$= \text{جتا}\,\frac{-٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_{٢} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت$

عند $ر = ٢$: $\therefore ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{١١\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{١١\pi}{٦}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٦}$

٢

① نفرض أن : $ع^{٣} = ٨ = ٨\,(\text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi ر}{٣}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = ٢\,(\text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠)$

عند $ر = ١$: $\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi}{٣}\right)$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٤\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٤\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{-٢\pi}{٣}\right)$

② نفرض أن : $ع^{٥} = -٣٢ = ٣٢\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٥}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$

عند $ر = ٠$: $\therefore ع_{١} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٥}\right)$

عند $ر = ١$: $\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٥}\right)$

عند $ر = ٢$: $\therefore ع_{٣} = ٢\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٧\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{٥}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٣\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{-٣\pi}{٥}\right)$

عند $ر = ٤$: $\therefore ع_{٥} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٩\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{٩\pi}{٥}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٥}\right)$

③ نفرض ان : $ع^{٦} = -٦٤ = ٦٤\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٦}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$

عند $ر = ٠$: $\therefore ع_{١} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٦}\right)$



عند $ر = ١$: $\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}\right)$

عند $ر = ٢$: $\therefore ع_{٣} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٦}\right)$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٧\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{٦}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-٥\pi}{٦}\right)$

عند $ر = ٤$:

$\therefore ع_{٥} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٢}\right)$

عند $ر = ٥$:

$\therefore ع_{٦} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{١١\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{١١\pi}{٦}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٦}\right)$

④ نفرض ان : $ع^{٤} = ١٦ت = ١٦\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}\right)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٤}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣$

عند $ر = ٠$:

$\therefore ع_{١} = ٢$ $\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٨}\right)$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٨}\right)$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٩\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{٩\pi}{٨}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٧\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{-٧\pi}{٨}\right)$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{١٣\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{١٣\pi}{٨}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٣\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{-٣\pi}{٨}\right)$

٣

① $ع^{٤} = ١٦ = ١٦\,(\text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٠ + ٢\pi ر}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{٠ + ٢\pi ر}{٤}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٢\pi ر}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{٢\pi ر}{٤}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣$

عند $ر = ٠$: $\therefore ع_{١} = ٢\,(\text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠) = ٢$

عند $ر = ١$: $\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}\right) = ٢ت$

عند $ر = ٢$: $\therefore ع_{٣} = ٢\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi) = -٢$

عند $ر = ٣$:

$\therefore ع_{٤} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}\right) = -٢ت$

$\therefore$ م.ح $= \{٢ ، ٢ت ، -٢ ، -٢ت\}$

② $ع^{٣} + ٨ = ٠$

$\therefore ع^{٣} = -٨ = ٨\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$: $\therefore ع_{١} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

عند $ر = ١$: $\therefore ع_{٢} = ٢\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi) = -٢$

عند $ر = ٢$: $\therefore ع_{٣} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٣}\right) = ١ - \sqrt{٣}\,ت$

م.ح $= \{١ + \sqrt{٣}\,ت ، -٢ ، ١ - \sqrt{٣}\,ت\}$

③ $ع^{٣} + ٨ت = ٠$

$\therefore ع^{٣} = -٨ت = ٨\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٢}\right)$

$\therefore ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٣}\right)$

حيث $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

عند $ر = ٠$: $\therefore ع_{١} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}\right) = ٢ت$

عند $ر = ١$:

$\therefore ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٧\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{٦}\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-٥\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-٥\pi}{٦}\right) = -\sqrt{٣} - ت$

عند $ر = ٢$:

$\therefore ع_{٣} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{١١\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{١١\pi}{٦}\right)$

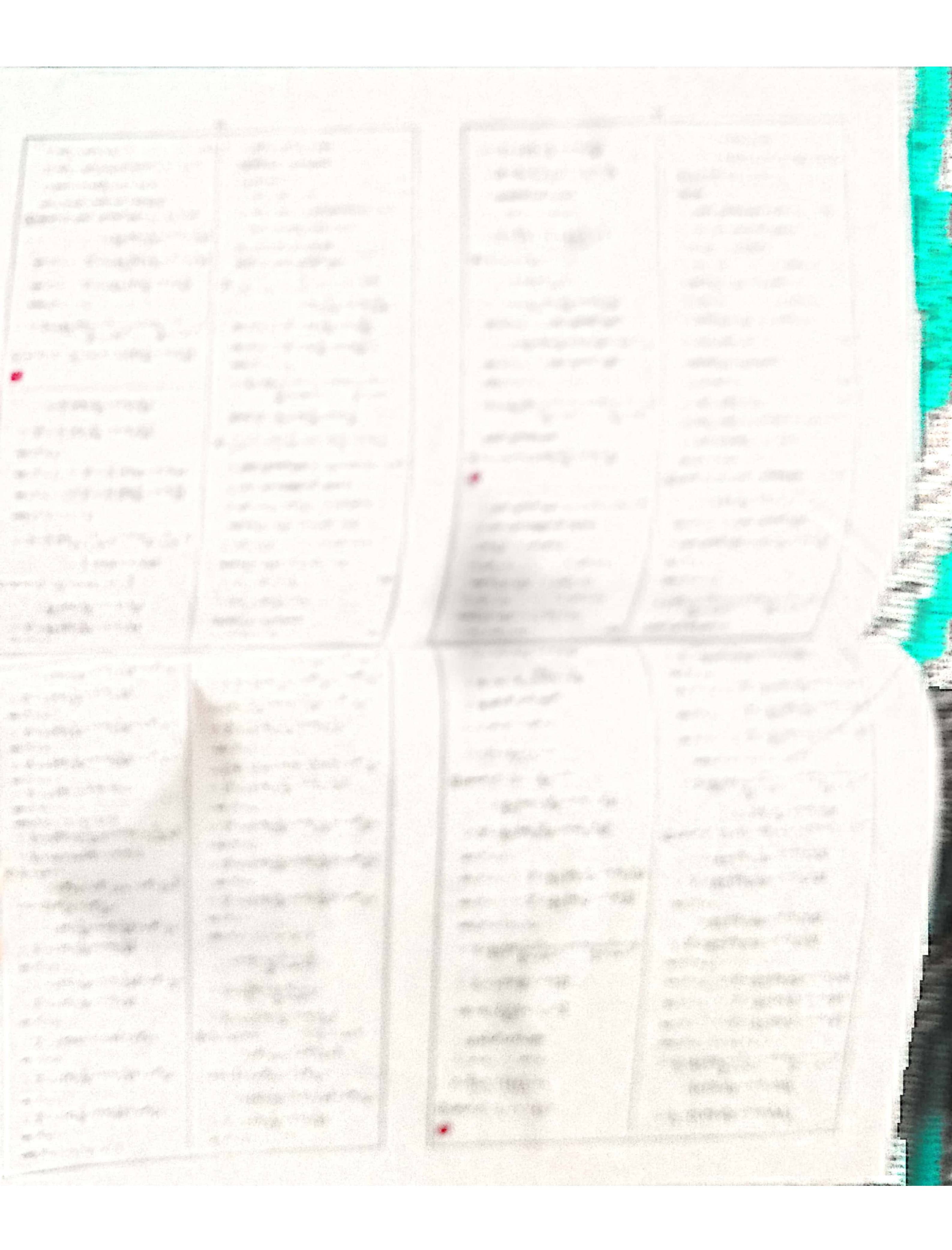
$= ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{٦}\right) = \sqrt{٣} - ت$

م.ح $= \{٢ت ، -\sqrt{٣} - ت ، \sqrt{٣} - ت\}$

④ $ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠$

$\therefore ع^{٥} = -٢٤٣ = ٢٤٣\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

$\therefore ع = ٣\left(\text{جتا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{\pi + ٢\pi ر}{٥}\right)$



$\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = 2\,\text{ت}\,\text{جا}\,ن\theta$ (1)

وفى حالة $\text{س} = \text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta = \text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta)$

$\therefore \text{س}^{ن} = \text{جتا}(-ن\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-ن\theta)$

$= \text{جتا}\,ن\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,ن\theta$

، $\frac{1}{\text{س}^{ن}} = \text{جتا}\,ن\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,ن\theta$

$\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = -2\,\text{ت}\,\text{جا}\,ن\theta$ (2)

من (1) ، (2) : $\therefore \text{س}^{ن} - \frac{1}{\text{س}^{ن}} = \pm 2\,\text{ت}\,\text{جا}\,ن\theta$

37

$ع_1 = 4(\text{جتا}\,2\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,2\theta)$

، $ع_2 = 13(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$

$= 13(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta))$

$\therefore ع_1 ع_2 = 4 \times 13 \,(\text{جتا}(2\theta - \theta) + \text{ت}\,\text{جا}(2\theta - \theta))$

$= 52\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$ (الصورة المثلثية)

$= 52\,\text{جتا}\,\theta + 52\,\text{ت}\,\text{جا}\,\theta$

$= 52 \times \frac{12}{13}$

$+ 52\,\text{ت} \times \frac{5}{13}$

$= 48 + 20\,\text{ت}$

(الصورة الجبرية)

، $ع_2^2 = [13(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta))]^2$

$= 169\,(\text{جتا}(-2\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-2\theta))$ (الصورة المثلثية)

$= 169\,\text{جتا}(-2\theta) + 169\,\text{ت}\,\text{جا}(-2\theta)$

$= 169\,(2\,\text{جتا}^2\theta - 1) - 169\,\text{ت}\,(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta)$

$= 169 \times \frac{119}{169} - 169\,\text{ت} \times \frac{120}{169}$

$= 119 - 120\,\text{ت}$ (الصورة الجبرية)

38

$ع = 5(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$

$\therefore ع^{-1}$

$= (5(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta))^{-1}$

$= \frac{1}{5}(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta))$ (الصورة المثلثية)

$= \frac{1}{5}\text{جتا}(-\theta) + \frac{1}{5}\text{ت}\,\text{جا}(-\theta)$

$= \frac{1}{5}\text{جتا}\,\theta - \frac{1}{5}\text{ت}\,\text{جا}\,\theta = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\text{ت}$

(الصورة الجبرية)

، $ع^{-2} = (ع^{-1})^2 = \frac{1}{25}(\text{جتا}(-2\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-2\theta))$

$= \frac{1}{25}\left((2\,\text{جتا}^2\theta - 1) - \text{ت}(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta)\right)$

$= \frac{-7}{625} + \frac{24}{625}\text{ت}$

$(\bar{ع})^{-2} = (5(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta))^{-2}$

$= (5(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta)))^{-2}$

$= \frac{1}{25}(\text{جتا}\,2\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,2\theta)$

$= \frac{1}{25}\left((2\,\text{جتا}^2\theta - 1) + \text{ت}(2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta)\right)$

$= \frac{-7}{625} - \frac{24}{625}\text{ت}$

حل آخر : $(\bar{ع})^{-2} = (\overline{ع^{-2}}) = \frac{-7}{625} - \frac{24}{625}\text{ت}$

39

الطرف الأيمن $= \left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} - \text{ت}\,\text{جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جا}\frac{\theta}{2} - \text{ت}\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{\text{جتا}\frac{-\theta}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-\theta}{2}}{\text{جتا}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + \text{ت}\,\text{جا}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}\right]^{ن}$

$= \left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \theta) + \text{ت}\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \theta)\right)^{ن}$

$= \text{جتا}\,ن(\frac{\pi}{2} - \theta) + \text{ت}\,\text{جا}\,ن(\frac{\pi}{2} - \theta) =$ الطرف الأيسر

43

$\because \text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = (\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})^{ن}$

$\therefore |\text{س} + \text{ت}\,\text{ص}| = |(\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})^{ن}|$

$\therefore \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)^{ن}}$ بالتربيع

$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = (\text{أ}^2 + \text{ب}^2)^{ن}$

حل آخر : $\because \text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = (\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})^{ن}$ (1)

$\therefore \overline{\text{س} + \text{ت}\,\text{ص}} = \overline{(\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})^{ن}}$

$\therefore \text{س} - \text{ت}\,\text{ص} = (\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت})^{ن}$ (2)

بضرب (1) × (2) :

$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = [(\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})(\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت})]^{ن}$

$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = (\text{أ}^2 + \text{ب}^2)^{ن}$

44

$\because (\text{جتا}\,\text{س} + \text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^5 = (\text{جتا}\,\text{س} + \text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^5$

$\therefore \text{جتا}\,5\text{س} + \text{ت}\,\text{جا}\,5\text{س} = \text{جتا}^5\text{س}$

$+ {}^5\text{ق}_1\,\text{جتا}^4\text{س}\,(\text{ت}\,\text{جا}\,\text{س}) + {}^5\text{ق}_2\,\text{جتا}^3\text{س}\,(\text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^2$

$+ {}^5\text{ق}_3\,\text{جتا}^2\text{س}\,(\text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^3$

$+ {}^5\text{ق}_4\,\text{جتا}\,\text{س}\,(\text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^4 + (\text{ت}\,\text{جا}\,\text{س})^5$

$= \text{جتا}^5\text{س} + \text{ت}(5\,\text{جتا}^4\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}) - 10\,\text{جتا}^3\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}$

$- \text{ت}(10\,\text{جتا}^2\text{س}\,\text{جا}^3\text{س}) + 5\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{جا}^4\text{س} + \text{ت}\,\text{جا}^5\text{س}$

بمقارنة الجزء التخيلى

$\therefore \text{جا}\,5\text{س} = 5\,\text{جتا}^4\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}$

$- 10\,\text{جتا}^2\text{س}\,\text{جا}^3\text{س} + \text{جا}^5\text{س}$

$\therefore \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = 5\,\text{جتا}^4\text{س} - 10\,\text{جتا}^2\text{س}$

$(1 - \text{جتا}^2\text{س}) + \text{جا}^4\text{س}$

$= 5\,\text{جتا}^4\text{س} - 10\,\text{جتا}^2\text{س}$

$+ 10\,\text{جتا}^4\text{س} + (1 - \text{جتا}^2\text{س})^2$

$= 5\,\text{جتا}^4\text{س} - 10\,\text{جتا}^2\text{س} + 10\,\text{جتا}^4\text{س}$

$+ 1 - 2\,\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتا}^4\text{س}$

$= 16\,\text{جتا}^4\text{س} - 12\,\text{جتا}^2\text{س} + 1$

45

$(1 + \text{ت})^{ن} = [\sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{4})]^{ن}$

$= 2^{\frac{ن}{2}}(\text{جتا}\frac{ن\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4})$ الصورة المثلثية.

$= (2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جتا}\frac{ن\pi}{4}) + \text{ت}(2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4})$ الصورة الجبرية

$\therefore \text{أ} = 2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جتا}\frac{ن\pi}{4}$ ، $\text{ب} = 2^{\frac{ن}{2}}\,\text{جا}\frac{ن\pi}{4}$

46

① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (أ)

إرشادات لحل رقم 46 :

① $\because |ع_1| = |ع_2| = |ع_3| = 1$

$\therefore |ع_1|^2 = |ع_2|^2 = |ع_3|^2 = 1$

$\therefore ع_1\bar{ع_1} = ع_2\bar{ع_2} = ع_3\bar{ع_3} = 1$ (1)

، $\because \left|\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3}\right| = 1$ (2)

وبالتعويض من (1) فى (2) :

$\therefore \left|\frac{ع_1\bar{ع_1}}{ع_1} + \frac{ع_2\bar{ع_2}}{ع_2} + \frac{ع_3\bar{ع_3}}{ع_3}\right| = 1$

$\therefore |\bar{ع_1} + \bar{ع_2} + \bar{ع_3}| = 1$

$\therefore |\overline{ع_1 + ع_2 + ع_3}| = 1$

$\therefore |ع_1 + ع_2 + ع_3| = 1$

② $\because |ع| = |\text{ت}\,ع|$

، ت ع صورة ع بدوران

حول (و) بزاوية (90°)

$\therefore$ (ع + ت ع) تمثل بالنقطة جـ

حيث و جـ قطر فى المربع و أ جـ ب

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{1}{2}|ع| \times |ع|$

$= \frac{1}{2}|ع|^2$

40

بوضع $ى = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$\therefore$ الطرف الأيمن

$= \left(\frac{1 + \text{جا}(90° - 2\theta) + \text{ت}\,\text{جتا}(90° - 2\theta)}{1 + \text{جا}(90° - 2\theta) - \text{ت}\,\text{جتا}(90° - 2\theta)}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{1 + \text{جتا}\,2\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,2\theta}{1 + \text{جتا}\,2\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,2\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{2\,\text{جتا}^2\theta + 2\,\text{ت}\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{2\,\text{جتا}^2\theta - 2\,\text{ت}\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{2\,\text{جتا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)}{2\,\text{جتا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)}\right)^{ن}$

$= \left(\frac{\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta)}\right)^{ن}$

$= (\text{جتا}\,2\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,2\theta)^{ن}$

لكن $2\theta = \frac{\pi}{2} - ى$

$= \left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت}\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ى)\right)^{ن}$

$= \text{جتا}\,ن(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت}\,\text{جا}\,ن(\frac{\pi}{2} - ى)$

حل آخر :

الطرف الأيمن

$= \left[\frac{\text{جا}^2ى - \text{ت}^2\,\text{جتا}^2ى + \text{جا}\,ى + \text{ت}\,\text{جتا}\,ى}{1 + \text{جا}\,ى - \text{ت}\,\text{جتا}\,ى}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{(\text{جا}\,ى - \text{ت}\,\text{جتا}\,ى)(\text{جا}\,ى + \text{ت}\,\text{جتا}\,ى) + (\text{جا}\,ى + \text{ت}\,\text{جتا}\,ى)}{1 + \text{جا}\,ى - \text{ت}\,\text{جتا}\,ى}\right]^{ن}$

$= \left[\frac{(\text{جا}\,ى + \text{ت}\,\text{جتا}\,ى)(1 + \text{جا}\,ى - \text{ت}\,\text{جتا}\,ى)}{(1 + \text{جا}\,ى - \text{ت}\,\text{جتا}\,ى)}\right]^{ن}$

$= \left[\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت}\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ى)\right]^{ن}$

$= \text{جتا}\,ن(\frac{\pi}{2} - ى) + \text{ت}\,\text{جا}\,ن(\frac{\pi}{2} - ى)$

③ من الرسم نجد أن :

$(ع_1 + ع_2)$

تمثل بالنقطة

أ حيث $\overline{\text{و أ}}$ قطر

فى المربع

، $\because$ طول القطر = طول الضلع × $\sqrt{2}$

$\therefore |ع_1 + ع_2| = |ع_1| \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

④ $\because (2\sqrt{3} - \text{ت})^5 = 3^{19}(\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت})$ (1)

$\therefore (2\sqrt{3} + \text{ت})^5 = 3^{19}(\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})$ (2)

بضرب المعادلتين (1) ، (2) :

$\therefore [(2\sqrt{3} + \text{ت})(2\sqrt{3} - \text{ت})]^5$

$= 9^{19}((\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})(\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت}))$

$(8 + 1)^5 = 9^{19}(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)$

$\therefore 9^5 = 9^{19}(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)$

$\therefore \text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 9^5 \div 9^{19} = 9^{-14}$

⑤ من الرسم نجد أن

طول القطر الواصل

بين $ع_1$ ، $ع_2$

يمثل $|ع_1 - ع_2|$

وباستخدام فيثاغورس

نجد أن :

$|ع_1 - ع_2| = \sqrt{(1\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 8$

⑥ نفرض أن $ع = \text{س} + \text{ت}\,\text{ص}$

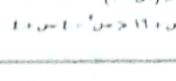
$\because |ع - 1| < |ع - 2|$

$\therefore |(\text{س} - 1) + \text{ت}\,\text{ص}| < |(\text{س} - 2) + \text{ت}\,\text{ص}|$

$\therefore \sqrt{(\text{س} - 1)^2 + \text{ص}^2} < \sqrt{(\text{س} - 2)^2 + \text{ص}^2}$

$\therefore (\text{س} - 1)^2 < (\text{س} - 2)^2$

$\therefore \text{س}^2 - 8\,\text{س} + 16 < \text{س}^2 - 4\,\text{س} + 4$



$\therefore 4\,\text{س} > 12$ $\therefore \text{س} > 3$

$\therefore$ س يمكن أن تساوى 4

⑦ $\because ع_1 = \text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{2}$

، $ع_2 = \text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{4}$

، $ع_3 = \text{جتا}\frac{\pi}{8} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{8}$

، ... وهكذا

$\therefore ع_1 \times ع_2 \times ع_3 \times$ ... إلى ∞

$= (\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{2})(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{4})$

$(\text{جتا}\frac{\pi}{8} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{8})$ ... إلى ∞

$= \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \cdots)$

$+ \text{ت}\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \cdots)$

$= \text{جتا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$

«باستخدام مجموع المتتابعة الهندسية»

$= \text{جتا}(\pi) + \text{ت}\,\text{جا}(\pi) = -1$

إجابات تمارين 7

1

① $ل = 2$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ $\therefore -2\,\text{ت} = 2\,هـ^{-\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

② $ل = 7$ ، $\theta = 0$ $\therefore 7 = 7\,هـ^{0}$

③ $ل = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

، $\because$ س > 0 ، ص < 0

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الرابع

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}$ $\therefore \theta = \frac{-\pi}{6}$

$\therefore 2\sqrt{3} - 2\,\text{ت} = 4\,هـ^{-\frac{\pi}{6}\text{ت}}$

④ $\frac{8}{\sqrt{3} - \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} + \text{ت}}{\sqrt{3} + \text{ت}} = \frac{8(\sqrt{3} + \text{ت})}{3 - \text{ت}^2}$

$= \frac{8(\sqrt{3} + \text{ت})}{4} = 2\sqrt{3} + 2\,\text{ت}$

$= \sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + (٢)^٢} = ٤$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$θ = ظا^{-١}\left(\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٦}$

$\frac{٨}{\sqrt{٣} - ت} = ٤ \, هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$

$\frac{٤}{\sqrt{٣}ت+١} \times \frac{١ - \sqrt{٣}ت}{١ - \sqrt{٣}ت} = \frac{٤(١ - \sqrt{٣}ت)}{١ - ٣ت^٢}$

$\frac{٤(١ - \sqrt{٣}ت)}{٤} = ١ - \sqrt{٣}ت$

$ل = \sqrt{(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

θ فى الربع الرابع

$θ = ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = \frac{-\pi}{٣}$

$\frac{٤}{١ + \sqrt{٣}ت} = ٢ \, هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

$= ٢ ، θ = \pi$

$∴ ع = ٢ (جتا \pi + ت جا \pi)$

$= ٢ (-١ + ت × صفر) = -٢$

$= \sqrt{٢} ، θ = -\frac{\pi}{٢}$

$∴ ع = \sqrt{٢}\left(جتا -\frac{\pi}{٢} + ت جا -\frac{\pi}{٢}\right)$

$= \sqrt{٢}(صفر - ت) = -\sqrt{٢}ت$

$= ٨ ، θ = \frac{\pi}{٦}$

$∴ ع = ٨ \left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}\right)$

$= ٨\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت\right) = ٤\sqrt{٣} + ٤ت$

$\frac{١}{٢}(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$

$∴ ل = \frac{١}{٢} ، θ = ٦٠°$

⑥ $\frac{١}{جتا θ - ت جا θ} = \frac{١}{جتا(-θ) + ت جا(-θ)}$

$= \frac{١}{هـ^{-θت}} = هـ^{θت}$

٦

① $ع = \frac{٢ - ٢ت}{٢ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{٢ت + ٢}{-٢} = -١ - ت$

$∴ ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الثالث

$∴ θ = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{-١}{-١}\right) = \frac{-٣\pi}{٤}$

الصورة المثلثية $ع = \sqrt{٢}\left(جتا \frac{-٣\pi}{٤} + ت جا \frac{-٣\pi}{٤}\right)$

والصورة الأسية $ع = \sqrt{٢} \, هـ^{\frac{-٣\pi}{٤}ت}$

② $ع = \frac{\sqrt{٢}ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{\sqrt{٢}ت - \sqrt{٢}ت^٢}{١ - ت^٢}$

$= \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}ت}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت$

$∴ ل = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢} = ١$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$∴ θ = ظا^{-١}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)}{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)}\right) = ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$

∴ الصورة المثلثية $ع = جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤}$

والصورة الأسية $ع = هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

③ $ع = \frac{(ت - ١)(٣ - ٤ت)}{(١ + ٢ت)^٢}$

$= \frac{(ت - ١)(٣ - ٤ت)}{-٣ + ٤ت} = ١ - ت$

$∴ ل = \sqrt{(١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

وبالتقدير الدائرى $= \frac{٦٠}{١٨٠} \times \pi = \frac{\pi}{٣}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

② $-٤\left(جتا \frac{٧\pi}{٦} + ت جا \frac{٧\pi}{٦}\right)$

$= ٤\left(-جتا \frac{٧\pi}{٦} - ت جا \frac{٧\pi}{٦}\right)$

$= ٤\left(-جتا (\pi + \frac{١}{٦}\pi) - ت جا (\pi + \frac{١}{٦}\pi)\right)$

$= ٤\left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}\right)$

$∴ ل = ٤ ، θ = \frac{\pi}{٦}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= ٤ \, هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$

③ $-٢\left(جا \frac{\pi}{٣} - ت جتا \frac{\pi}{٣}\right) = ٢\left(-جا \frac{\pi}{٣} + ت جتا \frac{\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(جتا \left(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٣}\right) + ت جا \left(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٣}\right)\right)$

$= ٢\left(جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦}\right)$

∴ العدد على الصورة الأسية $= ٢ \, هـ^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$

④ $\sqrt{٢}\left(-جا \frac{٣\pi}{٤} + ت جتا \frac{٣\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(-جا \left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right) + ت جتا \left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)\right)$

$= \sqrt{٢}\left(-جا \frac{\pi}{٤} - ت جتا \frac{\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(جتا \left(-\frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٢}\right) + ت جا \left(-\frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٢}\right)\right)$

$= \sqrt{٢}\left(جتا \left(-\frac{٣\pi}{٤}\right) + ت جا \left(-\frac{٣\pi}{٤}\right)\right)$

$∴ ل = \sqrt{٢} ، θ = \frac{-٣\pi}{٤}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= \sqrt{٢} \, هـ^{\frac{-٣\pi}{٤}ت}$

٤

① $ل = \sqrt{(\sqrt{٦})^٢ + (-٣\sqrt{٢})^٢} = ٢\sqrt{٦}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$θ = ظا^{-١}\left(\frac{-٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٦}}\right) = \frac{-\pi}{٣}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$∴ θ = ظا^{-١}\left(\frac{-١}{١}\right) = \frac{-\pi}{٤}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = \sqrt{٢}\left(جتا \left(-\frac{\pi}{٤}\right)\right.$ $\left.+ ت جا \left(-\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

والصورة الأسية لـ $ع = \sqrt{٢} \, هـ^{-\frac{\pi}{٤}ت}$

٧

① (جـ)	② (ب)	③ (أ)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (أ)	⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (أ)	

٨

① $هـ^{\frac{\pi}{٣}ت} = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

$هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت} = جتا -\frac{\pi}{٣} + ت جا -\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

$∴ هـ^{\frac{\pi}{٣}ت} - هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت} = \left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$- \left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = \sqrt{٣}ت$

② $هـ^{٤ + \pi ت} = هـ^٤ \times هـ^{\pi ت}$

$= هـ^٤ (جتا \pi + ت جا \pi)$

$= هـ^٤ (-١ + صفر ت) = -هـ^٤$

$هـ^{-\pi ت} = جتا (-\pi) + ت جا (-\pi)$

$= (-١ + صفر ت) = -١$

$∴ هـ^{٤ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = -هـ^٤ - (-١)$

$= ١ - هـ^٤$

③ $هـ^{θت} = جتا θ + ت جا θ$

$هـ^{-θت} = جتا (-θ) + ت جا (-θ)$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = ٢\sqrt{٦}\left(جتا \left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right.$ $\left.+ ت جا \left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right)$

، الصورة الأسية لـ $ع = ٢\sqrt{٦} \, هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

② $\bar{ع} = \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٢}ت$ $\quad ∴ ل = ٢\sqrt{٦}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$θ = ظا^{-١}\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٦}}\right) = \frac{\pi}{٣}$

∴ الصورة المثلثية لـ $\bar{ع} = ٢\sqrt{٦}\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)$

، الصورة الأسية لـ $\bar{ع} = ٢\sqrt{٦} \, هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

③ $-ع = -\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٢}ت$

$∴ ل = ٢\sqrt{٦}$ $\quad$ ∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى

$∴ θ = \pi + ظا^{-١}\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{-\sqrt{٦}}\right) = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ الصورة المثلثية لـ (−ع)

$= ٢\sqrt{٦}\left(جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣}\right)$

والصورة الأسية لـ $(-ع) = ٢\sqrt{٦} \, هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

④ $-\bar{ع} = -\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٢}ت$

$∴ ل = ٢\sqrt{٦}$ $\quad$ ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الثالث

$∴ θ = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{-٣\sqrt{٢}}{-\sqrt{٦}}\right) = \frac{-٢\pi}{٣}$

∴ الصورة المثلثية لـ $(-\bar{ع})$

$= ٢\sqrt{٦}\left(جتا \frac{-٢\pi}{٣} + ت جا \frac{-٢\pi}{٣}\right)$

$∴ هـ^{θت} + هـ^{-θت} = (جتا θ + ت جا θ)$

$+ (جتا -θ + ت جا -θ)$

$= جتا θ + ت جا θ + جتا θ - ت جا θ$

$= ٢ جتا θ$

$∴ جتا θ = \frac{١}{٢}(هـ^{θت} + هـ^{-θت})$

④ $هـ^{θت} = جتا θ + ت جا θ$

$هـ^{-θت} = جتا (-θ) + ت جا (-θ)$

$∴ هـ^{θت} - هـ^{-θت} = (جتا θ + ت جا θ)$

$- (جتا (-θ) + ت جا (-θ))$

$= جتا θ + ت جا θ - جتا θ + ت جا θ$

$= ٢ت جا θ$

$∴ جا θ = \frac{١}{٢ت}(هـ^{θت} - هـ^{-θت}) \times \left(\frac{ت}{ت}\right)$

$= \frac{-ت}{٢}(هـ^{θت} - هـ^{-θت})$

٩

$ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}ت} \times \frac{١ + \sqrt{٣}ت}{١ + \sqrt{٣}ت} = -١ - \sqrt{٣}ت$

$∴ ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثالث

$∴ θ = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{-١}\right) = \frac{-٢\pi}{٣}$

∴ ع على الصورة المثلثية

$= ٢\left(جتا \frac{-٢\pi}{٣} + ت جا \frac{-٢\pi}{٣}\right)$

وعلى الصورة الأسية $= ٢ \, هـ^{\frac{-٢\pi}{٣}ت}$

① $ع^٦$ على الصورة المثلثية

$= ٢^٦\left(جتا ٦ \times \frac{-٢\pi}{٣} + ت جا ٦ \times \frac{-٢\pi}{٣}\right)$

$= ٦٤ (جتا -٤\pi + ت جا -٤\pi)$

$= ٦٤ (١ + صفر × ت) = ٦٤$ وهو عدد حقيقى

② $\frac{١}{ع}$ على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢ \, هـ^{\frac{-٢\pi}{٣}ت}} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

⑤ $\frac{١}{ع} = \frac{(جتا ٠ + ت جا ٠)}{٢\sqrt{٦}\left(جتا \left(-\frac{\pi}{٣}\right) + ت جا \left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right)}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٦}}\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)$

∴ الصورة المثلثية للعدد $\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٦}}{١٢}\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)$

، الصورة الأسية للعدد $\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٦}}{١٢} هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

⑥ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{جتا ٠ + ت جا ٠}{٢\sqrt{٦}\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)}$

$= \frac{\sqrt{٦}}{١٢}\left(جتا \left(\frac{-\pi}{٣}\right) + ت جا \left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$

∴ الصورة المثلثية $= \frac{\sqrt{٦}}{١٢}\left(جتا \frac{-\pi}{٣} + ت جا \frac{-\pi}{٣}\right)$

، الصورة الأسية $= \frac{\sqrt{٦}}{١٢} هـ^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

٥

① $ل (جتا θ - ت جا θ) = ل (جتا (-θ) + ت جا (-θ))$

والصورة الأسية $= ل \, هـ^{-θت}$

② $-ل (جتا θ + ت جا θ) = ل (-جتا θ - ت جا θ)$

$= ل (جتا (-\pi + θ) + ت جا (-\pi + θ))$

والصورة الأسية $= ل \, هـ^{(-\pi + θ)ت}$

③ $٦ (-جتا θ + ت جا θ)$

$= ٦ (جتا (\pi - θ) + ت جا (\pi - θ))$

والصورة الأسية $= ٦ \, هـ^{(\pi - θ)ت}$

④ $٢ (-جا θ + ت جتا θ) = ٢ \left(جتا \left(\frac{\pi}{٢} + θ\right)\right.$ $\left.+ ت جا \left(\frac{\pi}{٢} + θ\right)\right)$

والصورة الأسية $= ٢ \, هـ^{\left(\frac{\pi}{٢} + θ\right)ت}$

⑤ $-ل (جا θ + ت جتا θ) = ل (-جا θ - ت جتا θ)$

$= ل (جتا (-\pi + θ) + ت جا (-\pi + θ))$

١٠

$ع = ٢\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)$

$∴ \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}\left(جتا -\frac{\pi}{٣} + ت جا -\frac{\pi}{٣}\right)$

وعلى الصورة الأسية $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

$= \frac{١}{٢} هـ^{\left(\frac{-\pi}{٣} + ٢\pi\right)ت} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

١١

$ع_١ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°)$

، $ع_٢ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)$

$∴ ع_١ ع_٢ = ٢ \times ٤ (جتا (٧٥° + ١٥°)$

$+ ت جا (٧٥° + ١٥°))$

$= ٨ (جتا (٩٠°) + ت جا (٩٠°))$

$∴ ل = ٨ ، θ = \frac{\pi}{٢}$

وعلى الصورة الأسية $= ٨ \, هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°)}{٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)}$

$= \frac{١}{٢}(جتا (٦٠°) + ت جا (٦٠°))$

$∴ ل = \frac{١}{٢} ، θ$ (بالتقدير الدائرى) $= \frac{٦٠}{١٨٠} \times \pi = \frac{\pi}{٣}$

$∴ \frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

١٢

$ع_١ = \frac{٢ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٢ + ٢ت}{٢} = ١ + ت$

$∴ |ع_١| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ $\quad ∴ θ = ظا^{-١} ١ = ٤٥°$

$∴ ع_١ = \sqrt{٢}(جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)$

$∴ \frac{ع_٢}{(ع_١)^٢} = \frac{٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)}{٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)}$

$= ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$

$∴ \frac{ع_٢}{(ع_١)^٢}$ على الصورة الأسية $= ٢ \, هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

$\therefore ل = \sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + (٢)^٢} = ٤$

، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الأول

، $θ = ظا^{-١}\left(\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}\right) = \frac{π}{٦}$

$\therefore \frac{٨}{\sqrt{٣} - ت} = ٤\, هـ^{\frac{π}{٦} ت}$

⑤ $\frac{٤}{١ + \sqrt{٣} ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - \sqrt{٣} ت} = \frac{٤(١ - \sqrt{٣} ت)}{١ - ٣ت^٢}$

$= \frac{٤(١ - \sqrt{٣} ت)}{٤} = ١ - \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، $\because$ س > ٠ ، ص < ٠

$\therefore$ θ فى الربع الرابع

، $θ = ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = \frac{-π}{٣}$

$\therefore \frac{٤}{١ + \sqrt{٣} ت} = ٢\, هـ^{-\frac{π}{٣} ت}$

٢

① ل = ٢ ، θ = π

$\therefore ع = ٢ (جتا\, π + ت\, جا\, π)$

$= ٢ (-١ + ت \times صفر) = -٢$

② $ل = \sqrt{٢}$ ، $θ = -\frac{π}{٢}$

$\therefore ع = \sqrt{٢} \left(جتا\left(-\frac{π}{٢}\right) + ت\, جا\left(-\frac{π}{٢}\right)\right)$

$= \sqrt{٢} (صفر - ت) = -\sqrt{٢} ت$

③ ل = ٨ ، $θ = \frac{π}{٦}$

$\therefore ع = ٨ \left(جتا \frac{π}{٦} + ت\, جا \frac{π}{٦}\right)$

$= ٨ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت\right) = ٤\sqrt{٣} + ٤ ت$

٣

① $\frac{١}{٢} (جتا\, ٦٠^\circ + ت\, جا\, ٦٠^\circ)$

$\therefore ل = \frac{١}{٢}$ ، $θ = ٦٠^\circ$

⑥ $\frac{١}{جتا\, θ - ت\, جا\, θ} = \frac{١}{جتا(-θ) + ت\, جا(-θ)}$

$= \frac{١}{هـ^{-θ ت}} = هـ^{θ ت}$

٦

① $ع = \frac{٢ - ٢ت}{٢ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{٢ت + ٢}{-٢} = -١ - ت$

$\therefore ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

$\because$ س < ٠ ، ص < ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الثالث

$\therefore θ = -π + ظا^{-١}\left(\frac{-١}{-١}\right) = \frac{-٣π}{٤}$

الصورة المثلثية $ع = \sqrt{٢} \left(جتا \frac{-٣π}{٤} + ت\, جا \frac{-٣π}{٤}\right)$

والصورة الأسية $ع = \sqrt{٢}\, هـ^{\frac{-٣π}{٤} ت}$

② $ع = \frac{\sqrt{٢} ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{\sqrt{٢} ت - \sqrt{٢} ت^٢}{١ - ت^٢}$

$= \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٢} ت}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} ت$

$\therefore ل = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢} = ١$

$\because$ س > ٠ ، ص > ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الأول

$\therefore θ = ظا^{-١} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)}{\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)}\right) = ظا^{-١} (١) = \frac{π}{٤}$

$\therefore$ الصورة المثلثية $ع = جتا \frac{π}{٤} + ت\, جا \frac{π}{٤}$

والصورة الأسية $ع = هـ^{\frac{π}{٤} ت}$

③ $ع = \frac{(ت - ١)(٢ - ٤ت)}{(١ + ٢ت)^٢}$

$= \frac{(ت - ١)(٢ - ٤ت)}{-٣ + ٤ت} = ١ - ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

وبالتقدير الدائرى $= \frac{٦٠}{١٨٠} \times π = \frac{π}{٣}$

$\therefore$ العدد على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢}\, هـ^{\frac{π}{٣} ت}$

② $-٤ \left(جتا \frac{٧π}{٦} + ت\, جا \frac{٧π}{٦}\right)$

$= ٤ \left(-جتا \frac{٧π}{٦} - ت\, جا \frac{٧π}{٦}\right)$

$= ٤ \left(-جتا \left(π + \frac{١}{٦} π\right) - ت\, جا \left(π + \frac{١}{٦} π\right)\right)$

$= ٤ \left(جتا \frac{π}{٦} + ت\, جا \frac{π}{٦}\right)$

$\therefore ل = ٤$ ، $θ = \frac{π}{٦}$

$\therefore$ العدد على الصورة الأسية $= ٤\, هـ^{\frac{π}{٦} ت}$

③ $-٢ \left(جتا \frac{π}{٣} - ت\, جا \frac{π}{٣}\right) = ٢ \left(-جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)$

$= ٢ \left(جتا \left(\frac{π}{٢} + \frac{π}{٣}\right) + ت\, جا \left(\frac{π}{٢} + \frac{π}{٣}\right)\right)$

$= ٢ \left(جتا \frac{٥π}{٦} + ت\, جا \frac{٥π}{٦}\right)$

$\therefore$ العدد على الصورة الأسية $= ٢\, هـ^{\frac{٥π}{٦} ت}$

④ $\sqrt{٢} \left(-جا \frac{٣π}{٤} + ت\, جتا \frac{٣π}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢} \left(-جا \left(π - \frac{π}{٤}\right) + ت\, جتا \left(π - \frac{π}{٤}\right)\right)$

$= \sqrt{٢} \left(-جا \frac{π}{٤} - ت\, جتا \frac{π}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢} \left(جتا \left(-\frac{π}{٢} - \frac{π}{٤}\right) + ت\, جا \left(-\frac{π}{٢} - \frac{π}{٤}\right)\right)$

$= \sqrt{٢} \left(جتا \left(-\frac{٣π}{٤}\right) + ت\, جا \left(-\frac{٣π}{٤}\right)\right)$

$\therefore ل = \sqrt{٢}$ ، $θ = \frac{-٣π}{٤}$

$\therefore$ العدد على الصورة الأسية $= \sqrt{٢}\, هـ^{\frac{-٣π}{٤} ت}$

٤

① $ل = \sqrt{(\sqrt{٦})^٢ + (-٣\sqrt{٢})^٢} = ٢\sqrt{٦}$

$\because$ س > ٠ ، ص < ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الرابع

$\therefore$ θ تقع فى الربع الرابع

$\therefore θ = ظا^{-١} \left(\frac{-١}{١}\right) = \frac{-π}{٤}$

$\therefore$ الصورة المثلثية لـ $ع = \sqrt{٢} \left(جتا \left(-\frac{π}{٤}\right)\right.$

$\left.+ ت\, جا \left(-\frac{π}{٤}\right)\right)$

والصورة الأسية لـ $ع = \sqrt{٢}\, هـ^{-\frac{π}{٤} ت}$

٧

① (جـ)	② (ب)	③ (أ)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (أ)	⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (أ)	

٨

① $هـ^{\frac{π}{٣} ت} = جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

$هـ^{-\frac{π}{٣} ت} = جتا -\frac{π}{٣} + ت\, جا -\frac{π}{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

$\therefore هـ^{\frac{π}{٣} ت} - هـ^{-\frac{π}{٣} ت} = \left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right)$

$- \left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right) = \sqrt{٣} ت$

② $هـ^{٤ + π ت} = هـ^٤ \times هـ^{π ت}$

$= هـ^٤ (جتا\, π + ت\, جا\, π)$

$= هـ^٤ (-١ + صفر\, ت) = -هـ^٤$

$هـ^{-π ت} = جتا (-π) + ت\, جا (-π)$

$= (-١ + صفر\, ت) = -١$

$\therefore هـ^{٤ + π ت} - هـ^{-π ت} = -هـ^٤ - (-١)$

$= ١ - هـ^٤$

③ $هـ^{θ ت} = جتا\, θ + ت\, جا\, θ$

$هـ^{-θ ت} = جتا (-θ) + ت\, جا (-θ)$

$\therefore$ الصورة المثلثية لـ $ع = ٢\sqrt{٦} \left(جتا \left(-\frac{π}{٣}\right)\right.$

$\left.+ ت\, جا \left(-\frac{π}{٣}\right)\right)$

، الصورة الأسية لـ $ع = ٢\sqrt{٦}\, هـ^{-\frac{π}{٣} ت}$

② $\bar{ع} = \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٢} ت$ $\therefore ل = ٢\sqrt{٦}$

$\because$ س > ٠ ، ص > ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الأول

$θ = ظا^{-١} \left(\frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٦}}\right) = \frac{π}{٣}$

$\therefore$ الصورة المثلثية لـ $\bar{ع} = ٢\sqrt{٦} \left(جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)$

، الصورة الأسية لـ $\bar{ع} = ٢\sqrt{٦}\, هـ^{\frac{π}{٣} ت}$

③ $-ع = -\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٢} ت$

$\therefore ل = ٢\sqrt{٦}$ $\because$ س < ٠ ، ص > ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الثانى

$\therefore θ = π + ظا^{-١} \left(\frac{٣\sqrt{٢}}{-\sqrt{٦}}\right) = \frac{٢π}{٣}$

$\therefore$ الصورة المثلثية لـ (−ع)

$= ٢\sqrt{٦} \left(جتا \frac{٢π}{٣} + ت\, جا \frac{٢π}{٣}\right)$

والصورة الأسية لـ $(-ع) = ٢\sqrt{٦}\, هـ^{\frac{٢π}{٣} ت}$

④ $-\bar{ع} = -\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٢} ت$

$\therefore ل = ٢\sqrt{٦}$ $\because$ س < ٠ ، ص < ٠

$\therefore$ θ تقع فى الربع الثالث

$\therefore θ = -π + ظا^{-١} \left(\frac{-٣\sqrt{٢}}{-\sqrt{٦}}\right) = \frac{-٢π}{٣}$

$\therefore$ الصورة المثلثية لـ $(-\bar{ع})$

$= ٢\sqrt{٦} \left(جتا \frac{-٢π}{٣} + ت\, جا \frac{-٢π}{٣}\right)$

$+ (جتا -θ + ت\, جا -θ)$

$= جتا\, θ + ت\, جا\, θ + جتا\, θ - ت\, جا\, θ$

$= ٢\, جتا\, θ$

$\therefore جتا\, θ = \frac{١}{٢} (هـ^{θ ت} + هـ^{-θ ت})$

④ $هـ^{θ ت} = جتا\, θ + ت\, جا\, θ$

$هـ^{-θ ت} = جتا (-θ) + ت\, جا (-θ)$

$\therefore هـ^{θ ت} - هـ^{-θ ت} = (جتا\, θ + ت\, جا\, θ)$

$- (جتا (-θ) + ت\, جا (-θ))$

$= جتا\, θ + ت\, جا\, θ - جتا\, θ + ت\, جا\, θ$

$= ٢ ت\, جا\, θ$

$\therefore جا\, θ = \frac{١}{٢ت} (هـ^{θ ت} - هـ^{-θ ت}) \times \left(\frac{ت}{ت}\right)$

$= \frac{-ت}{٢} (هـ^{θ ت} - هـ^{-θ ت})$

٩

$ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣} ت} \times \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ + \sqrt{٣} ت} = -١ - \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، $\because$ س < ٠ ، ص < ٠ $\therefore$ θ تقع فى الربع الثالث

$\therefore θ = -π + ظا^{-١} \left(\frac{-\sqrt{٣}}{-١}\right) = \frac{-٢π}{٣}$

$\therefore$ ع على الصورة المثلثية

$= ٢ \left(جتا \frac{-٢π}{٣} + ت\, جا \frac{-٢π}{٣}\right)$

وعلى الصورة الأسية $= ٢\, هـ^{\frac{-٢π}{٣} ت}$

① $ع^٦$ على الصورة المثلثية

$= ٢^٦ \left(جتا\, ٦ \times \frac{-٢π}{٣} + ت\, جا\, ٦ \times \frac{-٢π}{٣}\right)$

$= ٦٤ (جتا\, -٤π + ت\, جا\, -٤π)$

$= ٦٤ (١ + صفر \times ت) = ٦٤$ وهو عدد حقيقى

② $\frac{١}{ع}$ على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢\, هـ^{\frac{-٢π}{٣} ت}} = \frac{١}{٢}\, هـ^{\frac{٢π}{٣} ت}$

⑤ $\frac{١}{ع} = \frac{(جتا\, ٠ + ت\, جا\, ٠)}{٢\sqrt{٦} \left(جتا \left(-\frac{π}{٣}\right) + ت\, جا \left(-\frac{π}{٣}\right)\right)}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٦}} \left(جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)$

$\therefore$ الصورة المثلثية للعدد $\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٦}}{١٢} \left(جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)$

، الصورة الأسية للعدد $\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٦}}{١٢}\, هـ^{\frac{π}{٣} ت}$

⑥ $\frac{١}{ع} = \frac{جتا\, ٠ + ت\, جا\, ٠}{٢\sqrt{٦} \left(جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)}$

$= \frac{\sqrt{٦}}{١٢} \left(جتا \left(\frac{-π}{٣}\right) + ت\, جا \left(\frac{-π}{٣}\right)\right)$

$\therefore$ الصورة المثلثية $= \frac{\sqrt{٦}}{١٢} \left(جتا \frac{-π}{٣} + ت\, جا \frac{-π}{٣}\right)$

، الصورة الأسية $= \frac{\sqrt{٦}}{١٢}\, هـ^{\frac{-π}{٣} ت}$

٥

① $ل (جتا\, θ - ت\, جا\, θ) = ل (جتا (-θ) + ت\, جا (-θ))$

والصورة الأسية $= ل\, هـ^{-θ ت}$

② $-ل (جتا\, θ + ت\, جا\, θ) = ل (-جتا\, θ - ت\, جا\, θ)$

$= ل (جتا (-π + θ) + ت\, جا (-π + θ))$

والصورة الأسية $= ل\, هـ^{(-π + θ) ت}$

③ $٦ (-جتا\, θ + ت\, جا\, θ)$

$= ٦ (جتا (π - θ) + ت\, جا (π - θ))$

والصورة الأسية $= ٦\, هـ^{(π - θ) ت}$

④ $٢ (-جا\, θ + ت\, جتا\, θ) = ٢ \left(جتا \left(\frac{π}{٢} + θ\right)\right.$

$\left.+ ت\, جا \left(\frac{π}{٢} + θ\right)\right)$

والصورة الأسية $= ٢\, هـ^{\left(\frac{π}{٢} + θ\right) ت}$

⑤ $-ل (جا\, θ + ت\, جتا\, θ) = ل (-جا\, θ - ت\, جتا\, θ)$

$= ل (جتا (-π + θ) + ت\, جا (-π + θ))$

١٠

$ع = ٢ \left(جتا \frac{π}{٣} + ت\, جا \frac{π}{٣}\right)$

$\therefore \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} \left(جتا -\frac{π}{٣} + ت\, جا -\frac{π}{٣}\right)$

وعلى الصورة الأسية $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}\, هـ^{-\frac{π}{٣} ت}$

$= \frac{١}{٢}\, هـ^{\left(\frac{-π}{٣} + ٢π\right) ت} = \frac{١}{٢}\, هـ^{\frac{٥π}{٣} ت}$

١١

$ع_١ = ٢ (جتا\, ٧٥^\circ + ت\, جا\, ٧٥^\circ)$

، $ع_٢ = ٤ (جتا\, ١٥^\circ + ت\, جا\, ١٥^\circ)$

$\therefore ع_١ ع_٢ = ٢ \times ٤ \left(جتا (٧٥^\circ + ١٥^\circ)\right.$

$\left.+ ت\, جا (٧٥^\circ + ١٥^\circ)\right)$

$= ٨ (جتا (٩٠^\circ) + ت\, جا (٩٠^\circ))$

$\therefore ل = ٨$ ، $θ = \frac{π}{٢}$

وعلى الصورة الأسية $= ٨\, هـ^{\frac{π}{٢} ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٢ (جتا\, ٧٥^\circ + ت\, جا\, ٧٥^\circ)}{٤ (جتا\, ١٥^\circ + ت\, جا\, ١٥^\circ)}$

$= \frac{١}{٢} (جتا (٦٠^\circ) + ت\, جا (٦٠^\circ))$

$\therefore ل = \frac{١}{٢}$ ، θ (بالتقدير الدائرى) $= \frac{٦٠}{١٨٠} \times π = \frac{π}{٣}$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة الأسية $= \frac{١}{٢}\, هـ^{\frac{π}{٣} ت}$

١٢

$ع_١ = \frac{٢ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٢ + ٢ت}{٢} = ١ + ت$

$\therefore |ع_١| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠ $\therefore θ = ظا^{-١} \frac{١}{١} = ٤٥^\circ$

$\therefore ع_١ = \sqrt{٢} (جتا\, ٤٥^\circ + ت\, جا\, ٤٥^\circ)$

$\therefore \frac{ع_٢}{(ع_١)^٢} = \frac{٤ (جتا\, ١٥٠^\circ + ت\, جا\, ١٥٠^\circ)}{٢ (جتا\, ٩٠^\circ + ت\, جا\, ٩٠^\circ)}$

$= ٢ (جتا\, ٦٠^\circ + ت\, جا\, ٦٠^\circ)$

$\therefore \frac{ع_٢}{(ع_١)^٢}$ على الصورة الأسية $= ٢\, هـ^{\frac{π}{٣} ت}$

١٣

$ع_1 = 2\left(\text{جتا}(90° + 10°) + ت\,\text{جا}(90° + 10°)\right)$

$= 2(\text{جتا}\,100° + ت\,\text{جا}\,100°)$

$ع_2 = 4\left(\text{جتا}(10° - 180°) + ت\,\text{جا}(10° - 180°)\right)$

$= 4(\text{جتا}(-170°) + ت\,\text{جا}(-170°))$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2(\text{جتا}\,100° + ت\,\text{جا}\,100°)}{4(\text{جتا}(-170°) + ت\,\text{جا}(-170°))}$

$= \frac{1}{2}[\text{جتا}(100° - (-170°))$

$+ ت\,\text{جا}(100° - (-170°))]$

$= \frac{1}{2}(\text{جتا}\,270° + ت\,\text{جا}\,270°)$

$= \frac{1}{2}(\text{جتا}(-90°) + ت\,\text{جا}(-90°))$

$\therefore ل = \frac{1}{2} \,،\, \theta = -\frac{\pi}{2}$

∴ الصورة الأسية للعدد $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{1}{2} هـ^{-\frac{\pi}{2}ت}$

١٤

① $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{6(\text{جتا}\,240° + ت\,\text{جا}\,240°)}{2(\text{جتا}\,300° + ت\,\text{جا}\,300°)}$

$= 3(\text{جتا}(240° - 300°) + ت\,\text{جا}(240° - 300°))$

$= 3(\text{جتا}(-60°) + ت\,\text{جا}(-60°))$

$\therefore ل = 3 \,،\, \theta = \frac{-\pi}{3}$

∴ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_1}{ع_2} = 3 هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}$

② $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{2(\text{جتا}\,300° + ت\,\text{جا}\,300°)}{6(\text{جتا}\,240° + ت\,\text{جا}\,240°)}$

$= \frac{1}{3}(\text{جتا}(300° - 240°) + ت\,\text{جا}(300° - 240°))$

$= \frac{1}{3}(\text{جتا}\,60° + ت\,\text{جا}\,60°)$

$\therefore ل = \frac{1}{3} \,،\, \theta = \frac{\pi}{3}$

∴ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{1}{3} هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

③ $ع_1^2 = 6^2(\text{جتا}\,2 \times 240° + ت\,\text{جا}\,2 \times 240°)$

$= 36(\text{جتا}\,480° + ت\,\text{جا}\,480°)$

$= 36(\text{جتا}\,120° + ت\,\text{جا}\,120°)$

$\therefore ل = 36 \,،\, \theta = \frac{2\pi}{3}$

∴ الصورة الأسية لـ $ع_1^2 = 36 هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

④ $ع_2^4 = 2^4(\text{جتا}\,4 \times 300° + ت\,\text{جا}\,4 \times 300°)$

$= 16(\text{جتا}\,1200° + ت\,\text{جا}\,1200°)$

$= 16(\text{جتا}\,120° + ت\,\text{جا}\,120°)$

$\therefore ل = 16 \,،\, \theta = \frac{2\pi}{3}$

∴ الصورة الأسية لـ $ع_2^4 = 16 هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

١٥

$ع_1 = 2(\text{جتا}\,150° - ت\,\text{جا}\,150°)$

$= 2(\text{جتا}(-150°) + ت\,\text{جا}(-150°))$

$\therefore ل_1 = 2 \,،\, \theta_1 = \frac{-5\pi}{6}$

$\therefore ع_1 = 2 هـ^{\frac{-5\pi}{6}ت}$

، $ع_2 = 3(\text{جا}\,150° + ت\,\text{جتا}\,150°)$

$= 3(\text{جا}\,30° - ت\,\text{جتا}\,30°)$

$= 3(\text{جتا}(-60°) + ت\,\text{جا}(-60°))$

$\therefore ل_2 = 3 \,،\, \theta_2 = \frac{-\pi}{3}$

$\therefore ع_2 = 3 هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$

$ع_1 ع_2 = 6 هـ^{-\frac{7\pi}{6}ت} = 6 هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}$

$ع_1^2 = 4 هـ^{-\frac{5\pi}{3}ت} = 4 هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

$ع_2^4 = 81 هـ^{-\frac{4\pi}{3}ت} = 81 هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

١٦

① الصورة الأسية $= 6 هـ^{\frac{\pi}{2}ت + \frac{\pi}{3}ت} = 6 هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}$

والصورة المثلثية $= 6(\text{جتا}\frac{5\pi}{6} + ت\,\text{جا}\frac{5\pi}{6})$

② الصورة الأسية $= \frac{4}{2} هـ^{\frac{7\pi}{4}ت - \frac{5\pi}{3}ت} = 2 هـ^{\frac{\pi}{12}ت}$

والصورة المثلثية $= 2\left(\text{جتا}(\frac{\pi}{12}) + ت\,\text{جا}(\frac{\pi}{12})\right)$

③ الصورة الأسية $= \frac{3 \times 2 هـ^{\frac{7\pi}{15}ت + \frac{4\pi}{5}ت}}{2 هـ^{\frac{\pi}{6}ت + \frac{2\pi}{3}ت}}$

$= \frac{6 هـ^{\frac{19\pi}{15}ت}}{2 هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}}$

$= 3 هـ^{\frac{19\pi}{15}ت - \frac{5\pi}{6}ت} = 3 هـ^{\frac{13\pi}{30}ت}$

والصورة المثلثية $= 3\left(\text{جتا}(\frac{13\pi}{30}) + ت\,\text{جا}(\frac{13\pi}{30})\right)$

١٧

$ع_1 = 4(\text{جتا}\frac{5\pi}{3} - ت\,\text{جا}\frac{5\pi}{3})$

$= 4\left(\text{جتا}(2\pi - \frac{5\pi}{3}) + ت\,\text{جا}(2\pi - \frac{5\pi}{3})\right)$

$= 4\left(\text{جتا}(\frac{\pi}{3}) + ت\,\text{جا}(\frac{\pi}{3})\right)$

$ع_2 = هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$ على الصورة المثلثية $ع_2 = \text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2}$

$\therefore ع = \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2}}{4(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{1}{4}\left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) + ت\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})\right)$

$= \frac{1}{4}(\text{جتا}\frac{\pi}{6} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{6})$

١٨

$ع_1 = 1 + \sqrt{3}ت$

$\therefore ل = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \,،\, \theta = \text{ظا}^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = 60°$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

∴ $ع_1$ على الصورة الأسية $= 2 هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

∴ $ع_2$ على الصورة الأسية $= هـ^{-\frac{\pi}{6}ت}$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2 هـ^{\frac{\pi}{3}ت}}{هـ^{-\frac{\pi}{6}ت}} = 2 هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$

١٩

$ع_1 = 1 - \sqrt{3}ت$

$\therefore ل = \sqrt{1 + 3} = 2$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ (الربع الرابع)

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3}$ $\therefore ع_1 = 2 هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$

$ع_2 = 1 + ت$ $\therefore ل = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ (الربع الأول)

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$ $\therefore ع_2 = \sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

$\therefore ع = \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2 هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}}{\sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت}} = \sqrt{2} هـ^{-\frac{7\pi}{12}ت}$

$\therefore ع^{12} = (\sqrt{2})^{12} هـ^{12 \times -\frac{7\pi}{12}ت} = 64 هـ^{-7\pi ت} = 64 هـ^{-\pi ت}$

$= 64 هـ^{\pi ت}$

$\therefore ع^{12} = 64(\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi) = -64$ (عدد حقيقي)

٢٠

$ع_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}ت\right) = 1 - ت$

$\therefore ع_1^2 = (1 - ت)^2 = 1 - 2ت + ت^2 = -2ت$

$\therefore \frac{ع_1^2}{ع_2} = \frac{-2ت}{1 + ت} \times \frac{1 - ت}{1 - ت} = \frac{-2 - 2ت}{2} = -1 - ت$

$\therefore ع = -1 - ت$ $\therefore ل = \sqrt{2}$

∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta = -\pi + \text{ظا}^{-1}(\frac{ص}{س}) = \frac{-3\pi}{4}$

$\therefore ع = \sqrt{2} هـ^{-\frac{3\pi}{4}ت}$

$= \frac{1}{2}(\text{جتا}\,60° + ت\,\text{جا}\,60°)$

$\therefore ل = \frac{1}{2} \,،\, \theta = \frac{\pi}{3}$

∴ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{1}{2} هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

١١

$ع_1 = 6\left(\text{جتا}(2\pi - \frac{4}{3}\pi) + ت\,\text{جا}(2\pi - \frac{4}{3}\pi)\right)^2$

$= 6(\text{جتا}\frac{2}{3}\pi + ت\,\text{جا}\frac{2}{3}\pi)^2$

$= 6(\text{جتا}\frac{4}{3}\pi + ت\,\text{جا}\frac{4}{3}\pi)$

، $ع_2 = 2(\text{جتا}\frac{5\pi}{3} + ت\,\text{جا}\frac{5\pi}{3})$

$\therefore ع_2^2 = 4(\text{جتا}\frac{10\pi}{3} + ت\,\text{جا}\frac{10\pi}{3})$

$\therefore ع = ع_1 ع_2^2 = 24(\text{جتا}\frac{14}{3}\pi + ت\,\text{جا}\frac{14}{3}\pi)$

$= 24(\text{جتا}\frac{2}{3}\pi + ت\,\text{جا}\frac{2}{3}\pi)$

١٢

$\sqrt{2}ت^5 = \sqrt{2}ت$

على الصورة المثلثية $= \sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2})$

، $ت^4 + ت^5 = 1 + ت$

$ل = \sqrt{2}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الأول.

$\therefore ت^4 + ت^5 = \sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{4})$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}ت^5}{ت^4 + ت^5}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{4})}\right)^4$

$= \left(\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + ت\,\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\right)^4$

$= (\text{جتا}\frac{\pi}{4} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{4})^4$

$= (\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi)$

على الصورة الجبرية $= -1$

على الصورة الأسية $= هـ^{\pi ت}$

١٣

① $ع = 2(\text{جتا}\frac{2\pi}{3} + ت\,\text{جا}\frac{2\pi}{3}) \times 3(\text{جتا}\frac{\pi}{6} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{6})$

$= 6\left(\text{جتا}(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + ت\,\text{جا}(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})\right)$

$= 6(\text{جتا}\frac{5\pi}{6} + ت\,\text{جا}\frac{5\pi}{6})$

$ع_2^4 = 81 هـ^{-\frac{4\pi}{3}ت} = 81 هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

١٦

① الصورة الأسية $= 6 هـ^{\frac{\pi}{2}ت + \frac{\pi}{3}ت} = 6 هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}$

$\therefore ع = 6\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}ت\right) = -3\sqrt{3} + 3ت$

② $ع = (-2 + 2ت)(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2})$

$= (-2 + 2ت)(0 + ت)$

$= -2ت + 2ت^2 = -2 - 2ت$

١٤

الصورة الأسية لـ $ع_1 = هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

$\therefore ع_1^6 = هـ^{6 \times \frac{\pi}{4}ت} = هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}$

الصورة الأسية لـ $ع_2 = هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$

$\therefore ع_2^3 = هـ^{3 \times \frac{\pi}{2}ت} = هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}$

والصورة الأسية لـ $ع_3 = هـ^{\frac{\pi}{6}ت}$

$\therefore ع_3^4 = هـ^{4 \times \frac{\pi}{6}ت} = هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

∴ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_1^6 ع_2^3}{ع_3^4}$

$= \frac{هـ^{\frac{3\pi}{2}ت} \times هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}}{هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}} = هـ^{\frac{7\pi}{3}ت} = هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

١٥

$ع_1 = \text{جتا}\frac{7\pi}{4} - ت\,\text{جا}\frac{7\pi}{4} = \text{جتا}\frac{\pi}{4} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{4}$

$\therefore ع_1 = هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

، ∵ $ع_2 = -1 + ت$ $\therefore ل = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الثاني.

$\therefore \theta = \pi + \text{ظا}^{-1}(\frac{1}{-1}) = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore ع_2 = \sqrt{2} هـ^{\frac{3\pi}{4}ت}$

، $ع_3 = \text{جا}\,60° + ت\,\text{جتا}\,60°$

$= \text{جتا}\,30° + ت\,\text{جا}\,30° = \text{جتا}\frac{\pi}{6} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{6}$

$\therefore ع_3 = هـ^{\frac{\pi}{6}ت}$

$\therefore ع = \frac{(هـ^{\frac{\pi}{2}ت})^2 \times (\sqrt{2} هـ^{\frac{3\pi}{4}ت})^2}{(هـ^{\frac{5\pi}{12}ت})^2}$

$= \frac{هـ^{\pi ت} \times 2 هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}}{هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}} = 2 هـ^{(\pi + \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{6}\pi)ت}$

$= 2 هـ^{\frac{5\pi}{3}ت} = 2 هـ^{-\frac{1}{3}\pi ت}$

∴ ع على الصورة المثلثية $= 2\left(\text{جتا}(\frac{-\pi}{3}) + ت\,\text{جا}(\frac{-\pi}{3})\right)$

∴ ع على الصورة الجبرية $= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)$

$= 1 - \sqrt{3}ت$

٢٦

$ع = هـ^{\theta ت}$

$\therefore ع = \text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta$

$\frac{1 + ع}{1 - ع} = \frac{1 + \text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta}{1 - \text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta}$

$= \frac{1 + (2\text{جتا}^2\frac{\theta}{2} - 1) + 2ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}}{1 - (1 - 2\text{جا}^2\frac{\theta}{2}) - 2ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{2\text{جتا}^2\frac{\theta}{2} + 2ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}}{2\text{جا}^2\frac{\theta}{2} - 2ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{2\text{جتا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}\frac{\theta}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}]}{2\text{جا}\frac{\theta}{2}[\text{جا}\frac{\theta}{2} - ت\,\text{جتا}\frac{\theta}{2}]}$

$= \frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}\frac{\theta}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\theta}{2}]}{\text{جا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) + ت\,\text{جا}(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2})]}$

$= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$

$+ ت\,\text{جا}(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2})]$

$= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}(\frac{-3\pi}{2}) + ت\,\text{جا}(\frac{-3\pi}{2})]$

$= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}[\text{جتا}\frac{\pi}{2} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{2}]$

∴ المقياس $= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}$ والسعة $= \frac{\pi}{2}$

٢٧

① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (د)

إرشادات لحل رقم ٢٧ :

① $ت^{ت} = (هـ^{\frac{\pi}{2}ت})^{ت} = هـ^{\frac{\pi}{2}ت^2} = هـ^{\frac{-\pi}{2}}$

② ∵ $أ هـ^{2\theta ت} + ب هـ^{-2\theta ت}$

$= 4\,\text{جتا}\,2\theta - 6ت\,\text{جا}\,2\theta$

$\therefore أ(\text{جتا}\,2\theta + ت\,\text{جا}\,2\theta) + ب(\text{جتا}(-2\theta)$

$+ ت\,\text{جا}(-2\theta)) = 4\,\text{جتا}\,2\theta - 6ت\,\text{جا}\,2\theta$

$\therefore (أ + ب)\,\text{جتا}\,2\theta + (أ - ب)ت\,\text{جا}\,2\theta$

$= 4\,\text{جتا}\,2\theta - 6ت\,\text{جا}\,2\theta$

$\therefore أ + ب = 4 \,،\, أ - ب = -6$

$\therefore أ = -1 \,،\, ب = 5$

$\therefore أ ب = -5$

③ ∵ $س + ت ص = هـ^{\theta ت} = \text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta$

$\therefore س = \text{جتا}\,\theta \,،\, ص = \text{جا}\,\theta$

$\therefore س ص = \text{جتا}\,\theta \times \text{جا}\,\theta = \frac{1}{2}\text{جا}\,2\theta$

، ∵ $-1 \le \text{جا}\,2\theta \le 1$

$\therefore -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\text{جا}\,2\theta \le \frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \le س ص \le \frac{1}{2}$

∴ أقل قيمة للعدد س ص هي $-\frac{1}{2}$

④ من الشكل نجد أن

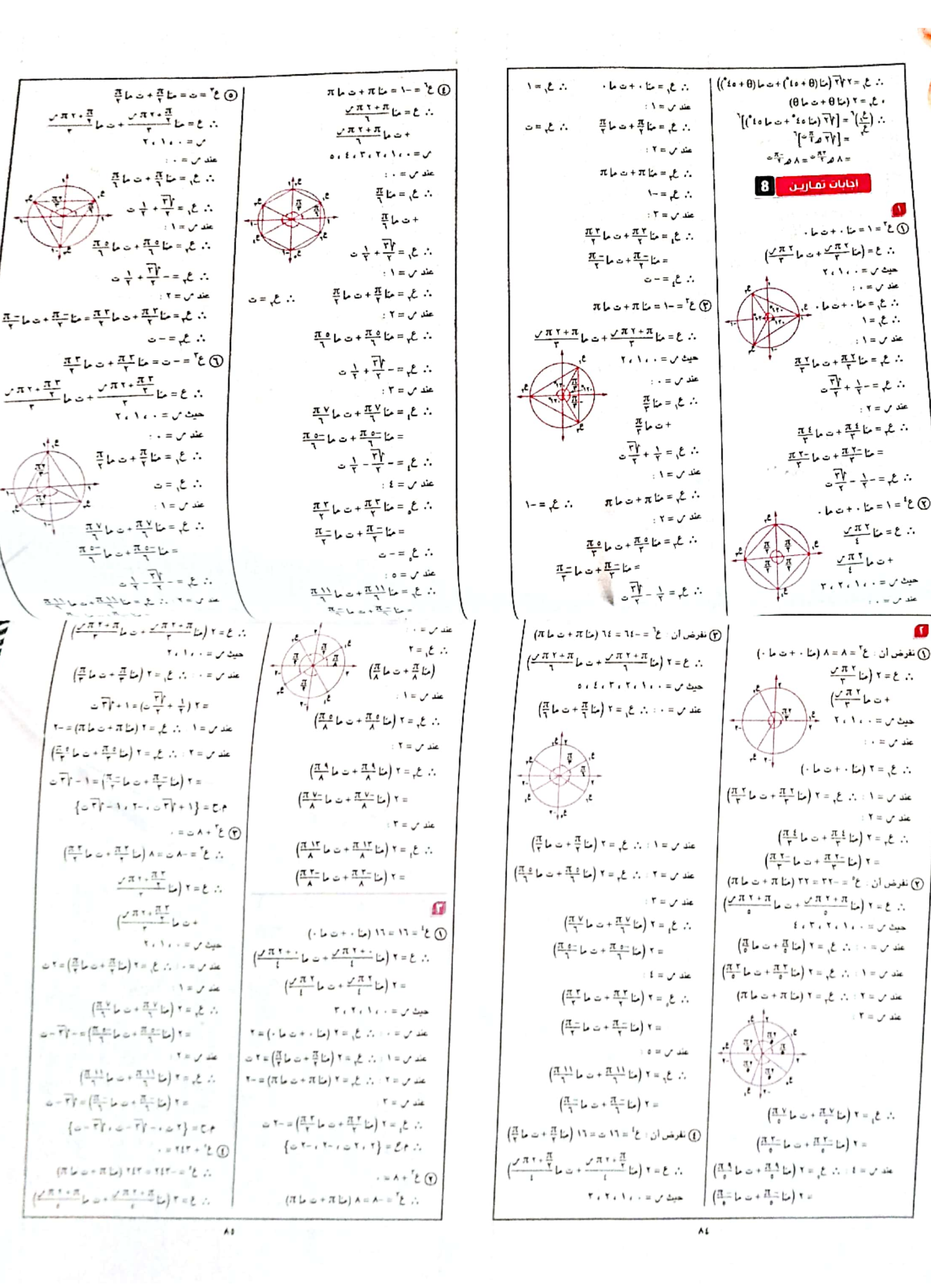
المثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

∴ قياس كل من زاويتي القاعدة = ٤٥°

$\therefore |ع_1| = 2\sqrt{2} \,،\, |ع_2| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

وبفرض أن سعة $(ع_2)$ هي θ

سعة $(ع_1)$ هي $\theta + 45°$



∴ ع = ٢√٢ (جتا (θ + ٤٥°) + ت جا (θ + ٤٥°))

، ع = ٢ (جتا θ + ت جا θ)

اجابات تمارين 8

١

[illegible]

$\because \theta = \frac{\pi}{3}$ [illegible]

$\because r = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$

(٨) $ع = 2 - 2\sqrt{3}\, ت$

[illegible]

∴ الجذر التكعيبي الأول للعدد ع = ٢ هـ^(π/٣ ت)

١ ∴ الجذر التكعيبي الثاني للعدد ع = ٢ هـ^(π ت)

٢ ∴ الجذر التكعيبي الثالث للعدد ع

= ٢ هـ^(٥π/٣ ت) = ٢ هـ^(-π/٣ ت)

= ((١ + ت)/(١ - ت))^٢

∴ ع = ((١ + ت)/(١ - ت) × (١ + ت)/(١ + ت))^٢

= ((١ + ٢ت + ت^٢)/٢)^٢ = ت^٢ = ت^٢ × ت = ت

∴ ع = ت = جتا π/٢ + ت جا π/٢

∴ الجذور التربيعية للعدد ع

= جتا (π/٢ + ٢πر)/٢ + ت جا (π/٢ + ٢πر)/٢

حيث ر = ٠ ، ١

عندما ر = ٠ فإن الجذر التربيعي الأول للعدد ع

= جتا π/٤ + ت جا π/٤

عندما ر = ١ فإن الجذر التربيعي الثاني للعدد ع

= جتا ٥π/٤ + ت جا ٥π/٤

= جتا -٣π/٤ + ت جا -٣π/٤

١٨

ع = ٦ - ٨ت نفرض أن ع^(١/٢) = س + ت ص

حيث س ، ص ∈ ح

∴ ع = س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت

∴ س^٢ - ص^٢ = ٦ (١)

، ٢ س ص = -٨ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س^٢ + ص^٢ = ١٠ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ س^٢ = ١٦

∴ س^٢ = ٨ ∴ س = ± ٢√٢

، بطرح (١) ، (٣) : ∴ ٢ ص^٢ = ٤

∴ ص^٢ = ٢ ∴ ص = ± √٢

، من (٢) : ∵ س ص < ٠

∴ ع^(١/٢) = ± (٢√٢ - √٢ ت) = ± √٢ (٢ - ت)

١٩

س + ت ص = ٢/(١ - √٣ ت) × (١ + √٣ ت)/(١ + √٣ ت)

= ١/٢ + √٣/٢ ت

∴ س = ١/٢ ، ص = √٣/٢

نفرض أن الجذر التربيعي للمقدار ١/٢ + √٣/٢ ت

هو أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح

∴ أ^٢ - ب^٢ + ٢ أ ب ت = ١/٢ + √٣/٢ ت

∴ أ^٢ - ب^٢ = ١/٢ (١) ، ٢ أ ب = √٣/٢ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ أ^٢ + ب^٢ = ١ (٣)

∴ بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ أ^٢ = ٣/٢

∴ أ^٢ = ٣/٤ ∴ أ = ± √٣/٢

، بطرح (١) ، (٣) : ∴ ٢ ب^٢ = ١/٢

∴ ب^٢ = ١/٤ ∴ ب = ± ١/٢

، من (٢) : ∵ أ ب > ٠

∴ الجذر التربيعي للمقدار ١/٢ + √٣/٢ ت

= ± (√٣/٢ + ١/٢ ت)

١٠

∵ (٧ - ١١ت)/(٤ + ت) × (٤ - ت)/(٤ - ت) = ١ - ٣ت

∴ أ = ١ ، ب = -٣

نفرض أن ع = (√(-ب + ٢ أ ت))^٣ = (√٣ + ت)^٣

∴ ع = (√٣ + ت)^٢ (√٣ + ت)

= (٢ + ٢√٣ ت) (√٣ + ت)

= ٨ت = ٨ (جتا π/٢ + ت جا π/٢)

∴ ع^(١/٢) = ٢√٢ (جتا (π/٢ + ٢πر)/٢ + ت جا (π/٢ + ٢πر)/٢)

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ : ع_١ = ٢√٢ (جتا π/٤ + ت جا π/٤)

عند ر = ١ : ع_٢ = ٢√٢ (جتا ٥π/٤ + ت جا ٥π/٤)

= ٢√٢ (جتا -٣π/٤ + ت جا -٣π/٤)

١١

ل = √((١)^٢ + (-√٣)^٢) = ٢

، θ = ظا^(-١) (-√٣/١) = -π/٣

∴ ع = ٢ (جتا -π/٣ + ت جا -π/٣)

∴ ع^(٣/٢) = ([٢ (جتا -π/٣ + ت جا -π/٣)]^٣)^(١/٢)

= (٨ (جتا -π + ت جا -π))^(١/٢)

= ٢√٢ (جتا (-π + ٢πر)/٢ + ت جا (-π + ٢πر)/٢)

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ : ع^(٣/٢) = ٢√٢ (جتا -π/٢ + ت جا -π/٢)

عند ر = ١ : ع^(٣/٢) = ٢√٢ (جتا π/٢ + ت جا π/٢)

١٢

ع_١ = √٣ (جتا π/٣ - ت جا π/٣)

= √٣ (جتا -π/٣ + ت جا -π/٣)

، ع_٢ = ٢ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°)

= ٢ (جتا (٩٠° - ٣٠°) + ت جا (٩٠° - ٣٠°))

= ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

= ٢ (جتا π/٣ + ت جا π/٣)

ع_١ ع_٢ = √٣ (جتا -π/٣ + ت جا -π/٣)

× ٢ (جتا π/٣ + ت جا π/٣)

= ٢√٣ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ٢√٣ هـ^٠

ع^٤ = ع_١ ع_٢ = ٢√٣ (جتا ٠ + ت جا ٠)

∴ ع = ⁴√(٢√٣) (جتا (٠ + ٢πر)/٤ + ت جا (٠ + ٢πر)/٤)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ر = ٠

∴ ع_١ = ⁴√(٢√٣) (جتا ٠ + ت جا ٠)

عند ر = ١

∴ ع_٢ = ⁴√(٢√٣) (جتا π/٢ + ت جا π/٢)

عند ر = ٢

∴ ع_٣ = ⁴√(٢√٣) (جتا π + ت جا π)

عند ر = ٣

∴ ع_٤ = ⁴√(٢√٣) (جتا ٣π/٢ + ت جا ٣π/٢)

= ⁴√(٢√٣) (جتا -π/٢ + ت جا -π/٢)

١٣

ع_١ = (جتا ٧π/١٨ + ت جا ٧π/١٨)^٣

= جتا ٧π/٦ + ت جا ٧π/٦ ...

، ع_٢ = (جتا π/٩ + ت جا π/٩)^٣

= جتا π/٣ + ت جا π/٣

∴ ع = ع_١/ع_٢ = جتا π/٢ + ت جا π/٢ = هـ^(π/٢ ت)

∴ √ع = هـ^((π/٢ + ٢πر)/٢ ت) حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠

∴ الجذر التربيعي الأول للعدد ع = هـ^(π/٤ ت)

، عند ر = ١

∴ الجذر التربيعي الثاني للعدد ع = هـ^(٥π/٤ ت)

١٤

ع_١ = ٢√٣ + ٢ت

∴ ل = √((٢√٣)^٢ + ٢^٢) = ٤

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الأول.

∴ θ = ظا^(-١) (٢/(٢√٣)) = ٣٠° = π/٦

∴ ع_١ = ٤ هـ^(π/٦ ت)

ع_٢ = ١ + √٣ ت

∴ ل = √(١^٢ + (√٣)^٢) = ٢

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الأول.

∴ θ = ظا^(-١) (√٣/١) = ٦٠° = π/٣

∴ ع_٢ = ٢ هـ^(π/٣ ت)

نفرض أن : ع^٣ = ع_١ ع_٢

= ٤ هـ^(π/٦ ت) × ٢ هـ^(π/٣ ت) = ٨ هـ^(π/٢ ت)

∴ ع = ٢ هـ^((π/٢ + ٢πر)/٣ ت) حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠ : ∴ ع_١ = ٢ هـ^(π/٦ ت)

عند ر = ١ : ∴ ع_٢ = ٢ هـ^(٥π/٦ ت)

عند ر = ٢ : ∴ ع_٣ = ٢ هـ^(٣π/٢ ت) = ٢ هـ^(-π/٢ ت)

١٥

ع_١ = -٢ + ٢√٣ ت

∴ ل = √((-٢)^٢ + (٢√٣)^٢) = ٤

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع في الربع الثاني.

∴ θ = π + ظا^(-١) (٢√٣/-٢) = π - π/٣ = ٢π/٣

∴ ع_١ = ٤ هـ^(٢π/٣ ت)

∵ ع_١ ع_٢ = ١٦ هـ^(١١π/٦ ت)

∴ ٤ هـ^(٢π/٣ ت) × ع_٢ = ١٦ هـ^(١١π/٦ ت)

∴ ع_٢ = ٤ هـ^(π ت)

الجذور التربيعية للعدد ع_٢ = ٢ هـ^((π + ٢πر)/٢ ت)

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ :

∴ الجذر التربيعي الأول للعدد ع_٢ = ٢ هـ^(π/٢ ت)

= ٢ (جتا π/٢ + ت جا π/٢)

عند ر = ١ :

∴ الجذر التربيعي الثاني للعدد ع_٢ = ٢ هـ^(٣π/٢ ت)

= ٢ هـ^(-π/٢ ت) = ٢ (جتا -π/٢ + ت جا -π/٢)

١٦

ع_١ = (٦ + ٤ت)/(١ + ت) × (١ - ت)/(١ - ت) = ٥ - ت

ع_٢ = ٢٦/(٥ - ت) × (٥ + ت)/(٥ + ت) = ٥ + ت

∴ ع_١ ، ع_٢ مترافقان

∴ ع_١ - ع_٢ = (٥ - ت) - (٥ + ت) = -٢ت

∴ ٤ (ع_١ - ع_٢) = -٨ت = ٨ (جتا -π/٢ + ت جا -π/٢)

الجذور التكعيبية للعدد ٤ (ع_١ - ع_٢)

= ٢ (جتا (-π/٢ + ٢πر)/٣ + ت جا (-π/٢ + ٢πر)/٣)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠ :

∴ الجذر التكعيبي الأول للعدد ٤ (ع_١ - ع_٢)

= ٢ (جتا -π/٦ + ت جا -π/٦)

عند ر = ١

∴ الجذر التكعيبي الثاني للعدد ٤ (ع_١ - ع_٢)

= ٢ (جتا π/٢ + ت جا π/٢)

عند ر = ٢

∴ الجذر التكعيبي الثالث للعدد ٤ (ع_١ - ع_٢)

= ٢ (جتا -٥π/٦ + ت جا -٥π/٦)

١٧

ع = ((√٣ + ت)/٢)^٤ = [((√٣ + ت)/٢)^٢]^٢ = [١/٢ + √٣/٢ ت]^٢

= -١/٢ + √٣/٢ ت

، ع_١ = جتا π/٦ + ت جا π/٦

= √٣/٢ + ١/٢ ت

∴ ع = (-١/٢ + √٣/٢ ت)/(√٣/٢ + ١/٢ ت) × (√٣/٢ - ١/٢ ت)/(√٣/٢ - ١/٢ ت) = ت

= جتا (π/٢) + ت جا (π/٢)

الجذور التربيعية للعدد ع

= جتا ((π/٢ + ٢πر)/٢) + ت جا ((π/٢ + ٢πر)/٢)

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠

∴ الجذر التربيعي الأول للعدد ع

= جتا π/٤ + ت جا π/٤

عند ر = ١

∴ الجذر التربيعي الثاني للعدد ع

= جتا ٥π/٤ + ت جا ٥π/٤ = جتا -٣π/٤ + ت جا -٣π/٤

١٨

س = ٤/(√٣ + ت) × (√٣ - ت)/(√٣ - ت) = ٤ (√٣ - ت)/(٣ + ١) = √٣ - ت

، ص = ٢ (جتا π/٦ + ت جا π/٦)

= ٢ (√٣/٢ + ١/٢ ت) = √٣ + ت

∴ س ، ص مترافقان.

ع = (س - ص)^٢ = (√٣ - ت - √٣ - ت)^٢ = (-٢ت)^٢

= -٤ = ٤ (جتا π + ت جا π)

∴ ∛ع = ∛٤ (جتا (π + ٢πر)/٣ + ت جا (π + ٢πر)/٣)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠

∴ ع_١ = ∛٤ (جتا π/٣ + ت جا π/٣) = ∛٤ هـ^(π/٣ ت)

عند ر = ١

∴ ع_٢ = ∛٤ (جتا π + ت جا π) = ∛٤ هـ^(π ت)

عند ر = ٢

∴ ع_٣ = ∛٤ (جتا ٥π/٣ + ت جا ٥π/٣)

= ∛٤ (جتا -π/٣ + ت جا -π/٣) = ∛٤ هـ^(-π/٣ ت)

١٩

ع = ١ - √٣ ت

∴ ل = √((١)^٢ + (-√٣)^٢) = ٢

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع.

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠^\circ = \frac{-\pi}{٣}$

$\therefore ع_١ = ٢\left(\text{حتا}\frac{-\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{-\pi}{٣}\right)$

$ع_٢ = \left(\text{حتا}\frac{هـ}{٢} - ت\,\text{حا}\frac{هـ}{٢}\right)^٢ = \left(\text{حتا}\frac{-هـ}{٢} + ت\,\text{حا}\frac{-هـ}{٢}\right)^٢$

$= \text{حتا}(-هـ) + ت\,\text{حا}(-هـ)$

$\therefore ع = \frac{٢\left(\text{حتا}\frac{-\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{-\pi}{٣}\right)(\text{حتا}\,هـ + ت\,\text{حا}\,هـ)}{\text{حتا}(-هـ) + ت\,\text{حا}(-هـ)}$

$= \frac{٢\left[\text{حتا}\left(هـ - \frac{\pi}{٣}\right) + ت\,\text{حا}\left(هـ - \frac{\pi}{٣}\right)\right]}{\text{حتا}(-هـ) + ت\,\text{حا}(-هـ)}$

$= ٢\left(\text{حتا}\left(٢هـ - \frac{\pi}{٣}\right) + ت\,\text{حا}\left(٢هـ - \frac{\pi}{٣}\right)\right)$

عند $هـ = \frac{\pi}{٦}$: $ع = ٢(\text{حتا}\,٠ + ت\,\text{حا}\,٠)$

الجذور التربيعية للعدد ع

$= \sqrt{٢}\left(\text{حتا}\frac{٠ + ٢\pi ر}{٢} + ت\,\text{حا}\frac{٠ + ٢\pi ر}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ : الجذر التربيعي الأول للعدد ع

$= \sqrt{٢}(\text{حتا}\,٠ + ت\,\text{حا}\,٠)$

عند ر = ١ : الجذر التربيعي الثانى للعدد ع

$= \sqrt{٢}(\text{حتا}\,\pi + ت\,\text{حا}\,\pi)$

٣٠

$ع_١ = ٢\left(\text{حا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{حتا}\frac{\pi}{٣}\right) = ٢\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣}\right)\right.$

$\left.+ ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣}\right)\right) = ٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٦}\right)$

$، ع_٢ = \sqrt{٢}\left(\text{حا}\frac{\pi}{٤} - ت\,\text{حتا}\frac{\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(\text{حتا}\left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{\pi}{٤}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{\pi}{٤}\right)\right)$

$= \sqrt{٢}\left(\text{حتا}\frac{٧\pi}{٤} + ت\,\text{حا}\frac{٧\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(\text{حتا}\frac{-\pi}{٤} + ت\,\text{حا}\frac{-\pi}{٤}\right)$

$ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore ل = \sqrt{١^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول.

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{\sqrt{٣}}{١}\right) = ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_٣ = ٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٣}\right)$

$ع = \frac{\left[٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٦}\right)\right]^٣ \times \left[\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\frac{-\pi}{٤} + ت\,\text{حا}\frac{-\pi}{٤}\right)\right]^٤}{\left[٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٣}\right)\right]^٥}$

$= \frac{٨\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٢}\right) \times ٤(\text{حتا} - \pi + ت\,\text{حا} - \pi)}{٣٢\left(\text{حتا}\frac{٥\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{٥\pi}{٣}\right)}$

$= \text{حتا}\frac{-١٣\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{-١٣\pi}{٦}$

$= \text{حتا} - \frac{\pi}{٦} + ت\,\text{حا} - \frac{\pi}{٦} = هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$

الجذور التربيعية للعدد ع

$= \text{حتا}\left(\frac{\frac{-\pi}{٦} + ٢\pi ر}{٢}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{\frac{-\pi}{٦} + ٢\pi ر}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ :

∴ الجذر التربيعى الأول للعدد ع

$= \text{حتا}\left(\frac{-\pi}{١٢}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{-\pi}{١٢}\right)$

عند ر = ١ :

∴ الجذر التربيعى الثانى للعدد ع

$= \text{حتا}\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)$

٣١

$ع_١ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول.

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{\sqrt{٣}}{١}\right) = ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_١ = ٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٣}\right)$

$ع_٢ = -\sqrt{٣} + ت$

$\therefore ل = \sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (١)^٢} = ٢$

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى.

$\therefore \theta = \pi + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{١}{-\sqrt{٣}}\right) = \pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_٢ = ٢\left(\text{حتا}\frac{٥\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{٥\pi}{٦}\right)$

$\therefore ع_٢^{١١} = ٢^{١١}\left(\text{حتا}\frac{٥٥\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{٥٥\pi}{٦}\right)$

$= ٢٠٤٨\left(\text{حتا}\frac{-٥\pi}{٦} + ت\,\text{حا}\frac{-٥\pi}{٦}\right)$

$ع_٣ = ٥١٢\,ت = ٥١٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٢}\right)$

$ع = \frac{٢\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٣}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi}{٣}\right)\right) \times ٢٠٤٨\left[\text{حتا}\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right)\right]}{٥١٢\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right)}$

$= ٨\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٣} + \frac{-٥\pi}{٦} - \frac{\pi}{٢}\right)\right.$

$\left.+ ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi}{٣} + \frac{-٥\pi}{٦} - \frac{\pi}{٢}\right)\right)$

$= ٨\left[\text{حتا}(-\pi) + ت\,\text{حا}(-\pi)\right] = ٨(\text{حتا}\,\pi + ت\,\text{حا}\,\pi)$

سعة ع = π ، |ع| = ٨

$، \sqrt[٣]{ع} = ٢\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣}\right)\right.$

$\left.+ ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi + ٢\pi ر}{٣}\right)\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠ :

∴ الجذر التكعيبى الأول للعدد ع

$= ٢\left(\text{حتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{\pi}{٣}\right)$

عند ر = ١ :

∴ الجذر التكعيبى الثانى للعدد ع = ٢ (حتا π + ت حا π)

عند ر = ٢ :

∴ الجذر التكعيبى الثالث للعدد ع

$= ٢\left(\text{حتا}\frac{٥\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{٥\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(\text{حتا}\frac{-\pi}{٣} + ت\,\text{حا}\frac{-\pi}{٣}\right)$

٣٢

$\sqrt{\frac{١٨ + ت}{٢ + ٣ت} \times \frac{٢ - ٣ت}{٢ - ٣ت}} = \sqrt{٣ - ٤ت}$

= س + ت ص بتربيع الطرفين.

∴ ٣ − ٤ ت = س² − ص² + ٢ س ص ت

∴ س² − ص² = ٣ (١) ، ٢ س ص = −٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع :

∴ س² + ص² = ٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ س² = ٨

∴ س² = ٤ ∴ س = ± ٢

، بطرح (١) ، (٣) : ∴ ٢ ص² = ٢

∴ ص² = ١ ∴ ص = ± ١

، من (٢) : ∵ س ص < ٠

∴ س + ت ص = ± (٢ − ت)

أى أن س = ± ٢ ، ص = ∓ ١

٣٣

① $(س + ت ص)^٢ = \frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت} \times \frac{٣ - ٢ت}{٣ - ٢ت}$

= ٨ − ٦ ت

∴ س² − ص² + ٢ س ص ت = ٨ − ٦ ت

∴ س² − ص² = ٨ (١)

، ٢ س ص = −٦ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س² + ص² = ١٠ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ س² = ١٨

∴ س² = ٩ ∴ س = ± ٣

، بطرح (١) ، (٣) : ∴ ٢ ص² = ٢

∴ ص² = ١ ∴ ص = ± ١

، من (٢) : ∵ س ص < ٠

∴ س = ± ٣ ، ص = ∓ ١

② (س + ت ص)² (١ + ت) + ٧ − ت = ٠

$\therefore (س + ت ص)^٢ = \frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$

= −٣ + ٤ ت

∴ س² − ص² + ٢ س ص ت = −٣ + ٤ ت

∴ س² − ص² = −٣ (١)

، ٢ س ص = ٤

$\therefore ص = \frac{٢}{س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore س^٢ - \left(\frac{٢}{س}\right)^٢ = -٣$

∴ س⁴ + ٣ س² − ٤ = ٠

∴ (س² + ٤) (س² − ١) = ٠

∴ س² = −٤ (مرفوض) أ، س² = ١

∴ س = ± ١

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ± ٢

③ (س + ت ص)² (١ + √٣ ت) = −١١ + ٥ √٣ ت

$\therefore (س + ت ص)^٢ = \frac{-١١ + ٥\sqrt{٣}\,ت}{١ + \sqrt{٣}\,ت}$

$\times \frac{١ - \sqrt{٣}\,ت}{١ - \sqrt{٣}\,ت} = ١ + ٤\sqrt{٣}\,ت$

∴ س² − ص² + ٢ س ص ت = ١ + ٤ √٣ ت

س² − ص² = ١ (١)

، ٢ س ص = ٤ √٣

$\therefore ص = \frac{٢\sqrt{٣}}{س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

$س^٢ - \left(\frac{٢\sqrt{٣}}{س}\right)^٢ = ١$

∴ س⁴ − س² − ١٢ = ٠

∴ س² = ٤ أ، س² = −٣ (مرفوض)

∴ س = ± ٢ وبالتعويض فى (٢)

∴ ص = ± √٣

④ (س + ت ص)² − ١٠ (س + ت ص) + ٤١ = ٠

بفرض أن ك = س + ت ص

∴ ك² − ١٠ ك + ٤١ = ٠

أ = ١ ، ب = −١٠ ، جـ = ٤١

$\therefore ك = \frac{١٠ \pm \sqrt{(-١٠)^٢ - ٤(١)(٤١)}}{٢(١)} = ٥ \pm ٤\,ت$

∴ س + ت ص = ٥ ± ٤ ت

∴ س = ٥ ، ص = ± ٤

٣٤

① س² − (١ + ت) س − ٦ + ٢ ت = ٠

أ = ١ ، ب = −(١ + ت) ، جـ = −٦ + ٢ ت

$\therefore س = \frac{١ + ت \pm \sqrt{(-١ - ت)^٢ - ٤(-٦ + ٢ت)}}{٢}$

$= \frac{١ + ت \pm \sqrt{٢ت + ٢٤ - ٨ت}}{٢}$

$= \frac{١ + ت \pm \sqrt{٢٤ - ٦ت}}{٢}$

نفرض أن √(٢٤ − ١٠ ت) = أ + ب ت بتربيع الطرفين

٢٤ − ١٠ ت = أ² − ب² + ٢ أ ب ت

∴ أ² − ب² = ٢٤ (١)

، ٢ أ ب = −١٠ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ أ² + ب² = ٢٦ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ ٢ أ² = ٥٠

∴ أ² = ٢٥ ∴ أ = ± ٥

، بطرح (١) ، (٣) ∴ ٢ ب² = ٢

∴ ب² = ١ ∴ ب = ± ١

، من (٢) ∵ أ ب < ٠

∴ أ + ب ت = ± (٥ − ت)

$\therefore س = \frac{١ + ت \pm (٥ - ت)}{٢}$

$\therefore س = \frac{١ + ت + ٥ - ت}{٢} = ٣$

$أ، س = \frac{١ + ت - (٥ - ت)}{٢} = -٢ + ت$

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٢ + ت}

② (١ − ت) س² − (٦ − ٤ ت) س + ٩ − ٧ ت = ٠

بالقسمة على ١ − ت

$\therefore س^٢ - \frac{(٦ - ٤ت)}{(١ - ت)} \times \frac{(١ + ت)}{(١ + ت)}\,س$

$+ \frac{(٩ - ٧ت)}{(١ - ت)} \times \frac{(١ + ت)}{(١ + ت)} = ٠$

∴ س² − (٥ + ت) س + (٨ + ت) = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −(٥ + ت) ، جـ = ٨ + ت

$\therefore س = \frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{(٥ + ت)^٢ - ٤(٨ + ت)}}{٢}$

$س = \frac{٥ + ت \pm \sqrt{-٨ + ٦ت}}{٢}$

نفرض أن √(−٨ + ٦ ت) = أ + ب ت بتربيع الطرفين

−٨ + ٦ ت = أ² − ب² + ٢ أ ب ت

∴ أ² − ب² = −٨ (١) ، ٢ أ ب = ٦ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ أ² + ب² = ١٠ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ أ² = ٢

∴ أ² = ١ ∴ أ = ± ١

، بطرح (١) ، (٣) : ∴ ٢ ب² = ١٨

∴ ب² = ٩ ∴ ب = ± ٣

، من (٢) : ∵ أ ب > ٠

∴ أ + ب ت = ± (١ + ٣ ت)

$\therefore س = \frac{٥ + ت \pm (١ + ٣ت)}{٢}$

$\therefore س = \frac{٥ + ت + (١ + ٣ت)}{٢} = ٣ + ٢ت$

$أ، س = \frac{٥ + ت - (١ + ٣ت)}{٢} = ٢ - ت$

∴ مجموعة الحل = {٣ + ٢ ت ، ٢ − ت}

③ ت س² + (١ − ٢ ت) س + ٢ ت − ١ = ٠

بالقسمة على ت

$\therefore س^٢ + \frac{١ - ٢ت}{ت} \times \frac{ت}{ت}\,س$

$+ \frac{٢ت - ١}{ت} \times \frac{ت}{ت} = ٠$

∴ س² + (−٢ − ت) س + ٢ + ت = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٢ − ت ، جـ = ٢ + ت

$\therefore س = \frac{٢ + ت \pm \sqrt{(-٢ - ت)^٢ - ٤(٢ + ت)}}{٢}$

$= \frac{٢ + ت \pm \sqrt{٣ + ٤ت - ١٢ - ٤ت}}{٢}$ [illegible]

$= \frac{٢ + ت \pm \sqrt{-٩}}{٢} = \frac{٢ + ت \pm ٣ت}{٢}$

$\therefore س = \frac{٢ + ت + ٣ت}{٢} = \frac{٢ + ٤ت}{٢} = ١ + ٢ت$

$أ، س = \frac{٢ + ت - ٣ت}{٢} = \frac{٢ - ٢ت}{٢} = ١ - ت$

∴ مجموعة الحل = {١ + ٢ ت ، ١ − ت}

(١) (ج) (٢) (ب) (٣) (ج) (٤) (ب) (٥) (ب)
(٦) (ب) (٧) (ج) (٨) (أ) (٩) (ب) (١٠) (ج)
(١١) (أ) (١٢) (ب) (١٣) (ب) (١٤) (ج) (١٥) (أ)
(١٦) (ب) (١٧) (أ) (١٨) (د) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)
(٢١) (ب) (٢٢) (أ)

٢٦

$جتا ٣θ + ت جا ٣θ = (جتا θ + ت جا θ)^3$

$= جتا^3 θ + ٣ جتا^2 θ جا θ ت - ٣ جتا θ جا^2 θ - جا^3 θ ت$

$= جتا^3 θ - ٣ جتا θ جا^2 θ + (٣ جتا^2 θ جا θ - جا^3 θ) ت$

① $جتا ٣θ = جتا^3 θ - ٣ جتا θ جا^2 θ$

$= جتا^3 θ - ٣ جتا θ (١ - جتا^2 θ)$

$= جتا^3 θ - ٣ جتا θ + ٣ جتا^3 θ$

$= ٤ جتا^3 θ - ٣ جتا θ$

② $جا ٣θ = ٣ جتا^2 θ جا θ - جا^3 θ$

$= ٣ (١ - جا^2 θ) جا θ - جا^3 θ$

$= ٣ جا θ - ٣ جا^3 θ - جا^3 θ$

$= ٣ جا θ - ٤ جا^3 θ$

٢٧

① $جتا ٤θ + ت جا ٤θ = (جتا θ + ت جا θ)^4$

$= جتا^4 θ + ٤ جتا^3 θ جا θ ت - ٦ جتا^2 θ جا^2 θ - ٤ جتا θ جا^3 θ ت + جا^4 θ$

$∴ جتا ٤θ = جتا^4 θ - ٦ جتا^2 θ جا^2 θ + جا^4 θ$

$= جتا^4 θ - ٦ جتا^2 θ (١ - جتا^2 θ) + (١ - جتا^2 θ)^2$

$= جتا^4 θ - ٦ جتا^2 θ + ٦ جتا^4 θ + ١ - ٢ جتا^2 θ + جتا^4 θ$

$= ٨ جتا^4 θ - ٨ جتا^2 θ + ١$

② $جا ٥θ + ت جتا ٥θ$ ...

$جا ٥θ = ٥ جتا^4 θ جا θ - ١٠ جتا^2 θ جا^3 θ + جا^5 θ$

$= ٥ (١ - جا^2 θ)^2 جا θ - ١٠ (١ - جا^2 θ) جا^3 θ + جا^5 θ$

$= ١٦ جا^5 θ - ٢٠ جا^3 θ + ٥ جا θ$

٢٨

$جتا ٤θ + ت جا ٤θ = (جتا θ + ت جا θ)^4$

$= جتا^4 θ + ٤ جتا^3 θ جا θ ت - ٦ جتا^2 θ جا^2 θ - ٤ جتا θ جا^3 θ ت + جا^4 θ$

$∴ جا ٤θ = ٤ جتا^3 θ جا θ - ٤ جتا θ جا^3 θ$

$= ٤ جتا θ جا θ (جتا^2 θ - جا^2 θ)$

② $جتا ٦θ + ت جا ٦θ = (جتا θ + ت جا θ)^6$

$= جتا^6 θ - ١٥ جتا^4 θ جا^2 θ + ١٥ جتا^2 θ جا^4 θ - جا^6 θ + (...) ت$

$∴ جتا ٦θ = جتا^6 θ - ١٥ جتا^4 θ جا^2 θ + ١٥ جتا^2 θ جا^4 θ - جا^6 θ$

$= جتا^6 θ - ١٥ جتا^4 θ (١ - جتا^2 θ) + ١٥ جتا^2 θ (١ - جتا^2 θ)^2 - (١ - جتا^2 θ)^3$

$= ٣٢ جتا^6 θ - ٤٨ جتا^4 θ + ١٨ جتا^2 θ - ١$

$= ١٦ جتا^5 θ - ٢٠ جتا^3 θ + ٥ جتا θ$

$- ٤ جتا θ جا^3 θ + جتا^4 θ ...$

$∴ جتا ٤θ = جتا^4 θ - ٦ جتا^2 θ جا^2 θ + جا^4 θ$

$= جتا^4 θ - ٦ جتا^2 θ (١ - جتا^2 θ) + (١ - جتا^2 θ)^2$

$= ٨ جتا^4 θ - ٨ جتا^2 θ + ١$

$∴ جتا^4 θ = \frac{١}{٨} (جتا ٤θ + ٨ جتا^2 θ - ١)$

$= \frac{١}{٨} \left(جتا ٤θ + ٨ \left(\frac{جتا ٢θ + ١}{٢} \right) - ١ \right)$

$= \frac{١}{٨} (جتا ٤θ + ٤ جتا ٢θ + ٤ - ١)$

$= \frac{١}{٨} (جتا ٤θ + ٤ جتا ٢θ + ٣)$

حل آخر:

الطرف الأيسر $= \frac{١}{٨} (جتا ٤θ + ٤ جتا ٢θ + ٣)$

$= \frac{١}{٨} (٢ جتا^2 ٢θ - ١ + ٤ جتا ٢θ + ٣)$

$= \frac{١}{٤} (جتا^2 ٢θ + ٢ جتا ٢θ + ١)$

$= \frac{١}{٤} (جتا ٢θ + ١)^2$

$= \frac{١}{٤} (٢ جتا^2 θ - ١ + ١)^2$

$= جتا^4 θ =$ الطرف الأيمن.

٣٦

$\sqrt{س + ص ت} = أ + ب ت$

$∴ س + ص ت = (أ + ب ت)^2$

$= أ^2 - ب^2 + ٢ أ ب ت$

$∴ س = أ^2 - ب^2 ، ص = ٢ أ ب$

$∴ \frac{س}{أ} = أ - \frac{ب^2}{أ}$ ، $\frac{ص}{ب} = ٢ أ$

الطرف الأيمن $= \frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ...$

$= (أ^2 - ٣ ب^2 ...)$

$∴ س^3 = ...$

إجابات تمارين 9

١

(١) (ج) (٢) (ج) (٣) (ج) (٤) (ب) (٥) (ب)
(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (ب) (١٢) (ج) (١٣) (ج) (١٤) (ب) (١٥) (ب)
(١٦) (ب) (١٧) (أ) (١٨) (ج) (١٩) (د) (٢٠) (أ)
(٢١) (ج) (٢٢) (د) (٢٣) (أ) (٢٤) (ب) (٢٥) (ج)
(٢٦) (أ) (٢٧) (أ)

٢

(١) $(١ - ω)(١ - ω^2) = ١ - ω^2 - ω + ω^3$

$= ١ - (ω + ω^2) + ١$

$= ١ - (-١) + ١ = ٣$

(٢) $(٢ + ٥ω + ٢ω^2)^4 = (٢(١ + ω^2) + ٥ω)^4$

$= (٢ × -ω + ٥ω)^4 = (٣ω)^4 = ٢٤٣ ω^4 = ٢٤٣ ω$

(٥) $(١ - ٢ω + ω^2)(١ + ω - ω^2)$

$= (-٢ω - ω)(-ω^2 - ω^2)$

$= -٣ω × -٢ω^2 = ٦ω^3 = ٦$

(٦) $(١ + ω^2)^{١٥} = (-ω)^{١٥} = -ω^{١٥} = -١$

(٧) $(١ + ω + ٢ω^2)^2 + (١ + ٢ω + ω^2)^2$

$= (-ω^2 + ٢ω^2)^2 + (-ω + ٢ω)^2$

$= (ω^2)^2 + ω^2 = ω^4 + ω^2$

$= ω + ω^2 = -١$

(٨) $(١ + ω^2)^3 + (١ - ω - ω^2)^3$

$= (-ω)^3 + (١ - (ω + ω^2))^3$

$= -ω^3 + (١ - (-١))^3 = -١ + ٨ = ٧$

(٩) $(١ - ω)(١ - ω^2)(١ + ω^2)$

$= (١ - ω^2 - ω + ω^3)(١ + ١)$

$= (١ - (ω + ω^2) + ١) × ٢$

$= (٢ - (-١)) × ٢ = ٦$

(١٠) $(١ - \frac{٢}{ω} - \frac{٢}{ω^2})(٣ - ٥ω - ٥ω^2)$

$= (١ - ٢ω^2 - ٢ω)(٣ - ٥ω - ٥ω^2)$

$= (١ - ٢(ω + ω^2))(٣ - ٥(ω + ω^2))$

$= (١ - ٢ × -١)(٣ - ٥ × -١)$

$= ٣ × ٨ = ٢٤$

(١١) $(ω + \frac{١}{ω})^2 (ω^2 + \frac{١}{ω^2})^2$

$= (ω + ω^2)^2 (ω^2 + ω)^2$

$= (-١)^2 × (-١)^2 = ١ × ١ = ١$

(١٢) $(١ + \frac{ω}{١} + ت)(١ + \frac{١}{ω} + ت)$

$= (١ + ω^2 + ت)(١ + ω + ت)$

$= (-ω + ت)(-ω^2 + ت)$

$= ω^3 - ω ت - ω^2 ت + (-١)$

$= ٢ - ت (ω + ω^2) - ١ = ٢ - ت × -١ = ت$

٣

$\frac{أ ω + ب}{ب + أ ω^2} + \frac{ب ω + ح}{ح + ب ω^2}$

$= \frac{أ ω^3 + ب ω}{ب ω + أ ω^3} + \frac{ح ω^2 + ب ω^3}{ح ω^2 + ب ω^3}$

$= \frac{ω (أ + ب ω^2)}{(أ + ب ω^2)} + \frac{ω^2 (ح + ب ω)}{(ح + ب ω)} = ω + ω^2 = -١$

٤

① الطرف الأيمن $= (١ + ω^2)^4 = (-ω)^4 = ω^4 = ω$ = الطرف الأيسر

② الطرف الأيمن $= (١ - \frac{٢}{ω} + ω^2)(١ - \frac{ω}{٢} + ω^2)$ ...

$= (١ - ٢ω^2 + ω)(١ + ω^2 - ٥ω)$

$= (-ω^2 - ٢ω^2)(-ω - ٥ω)$

$= -٣ω^2 × -٦ω = ١٨ω^3 = ١٨$ = الطرف الأيسر

③ الطرف الأيمن

$(١ - ω + ω^2)^2 + (١ + ω - ω^2)^2$

$= (١ - ω + ω^2)^2 + (١ + ω^2 - ω)$ ...

$= (صفر) + (ω - (ω + ١))^2$

$= (-ω^2 - ω^2)^2 = (-٢ω^2)^2$

$= ٤ω^4 = ٤ω$ = الطرف الأيسر

④ الطرف الأيمن

$= (١ + ٢ω + \frac{١}{ω})^2 + (١ + ٢ω^2 + \frac{١}{ω^2})^2$

$+ (٢ + ω^2 + ω)$ ...

$= ((١ + ω) + ٢ω^2)^2 + ((١ + ω^2) + ٢ω)^2$

$= (-ω^2 + ٢ω^2)^2 + (-ω + ٢ω)^2$

$= (ω^2)^2 + (ω)^2 = ω + ω^2 + ١$ ...

صفر = الطرف الأيسر

⑤ الطرف الأيمن

$= \frac{٥ - ٤ω + ١١ω^2}{١ - ٢ω + ٣ω^2} = \frac{...}{...}$

$= ٣ = \frac{-٣ (ω - ...)}{(ω ...)}$ الطرف الأيسر

⑥ الطرف الأيمن $= \left(\frac{١}{ω (٣ + ω)} - \frac{١}{١ + ٣ω} \right)^2$

...

$= \left(\frac{٢}{٧} \right)^2 = \frac{٤}{٤٩}$ ... الطرف الأيسر

⑦ الطرف الأيمن

...

⑧ الطرف الأيمن $= \frac{٣}{٢ - ω - ω^2} = \frac{٣}{٣} = ١$ = الطرف الأيسر

⑨ الطرف الأيمن

$\left(\frac{ω}{١ + ٢ω} \right)^2 + \left(\frac{١ + ٢ω}{ω} \right)^2$

...

= الطرف الأيسر

⑩ الطرف الأيمن

...

$= ١٦ = \frac{١٦}{١}$ الطرف الأيسر

⑪ الطرف الأيمن

...

= الطرف الأيسر

(١٢) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{3+5\omega+3\omega^2}{1-2\omega-4\omega^2} + \frac{3+5\omega^2+3\omega}{1-2\omega^2-4\omega}\right)$$

$$= \frac{5\omega-3\omega}{1-2\omega-4(-1-\omega)}$$

$$+ \frac{5\omega^2-3\omega^2}{1-2\omega^2-4(-1-\omega^2)}$$

$$= \frac{2\omega}{1-2\omega+4+4\omega}$$

$$+ \frac{2\omega^2}{1-2\omega^2+4+4\omega^2}$$

$$= \frac{2\omega}{5+2\omega} + \frac{2\omega^2}{5+2\omega^2}$$

$$= \frac{2\omega(5+2\omega^2)+2\omega^2(5+2\omega)}{(5+2\omega)(5+2\omega^2)}$$

$$= \frac{10\omega+4+10\omega^2+4}{25+10\omega^2+10\omega+4}$$

$$= \frac{8+10(-1)}{29+10(-1)} = \frac{-2}{19} = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٣) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{2+\omega^2+2+2\omega}{\omega^2-2} + \frac{1-\omega}{1+\omega+2+2\omega}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2+\omega^2-2\omega^2}{\omega^2-2} + \frac{1-\omega}{1+\omega-2\omega}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2-\omega^2}{\omega^2-2} + \frac{1-\omega}{\omega-1}\right)^2$$

$$= (-1-1)^2 = 4 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٤) الطرف الأيمن

$$= \frac{5+3\omega^2}{\omega-2} + \frac{5+3\omega}{\omega^2-2}$$

$$= \frac{(5+3\omega^2)(\omega^2-2)+(5+3\omega)(\omega-2)}{(\omega-2)(\omega^2-2)}$$

$$= \frac{10+6\omega^2-5\omega^2-3\omega+10+6\omega-5\omega-3\omega^2}{4-2\omega^2-2\omega+\omega^3}$$

$$= \frac{20-2\omega-2\omega^2}{5-2\omega^2-2\omega} = \frac{20+2}{5+2}$$

$$= \frac{22}{7} = \text{الطرف الأيسر}$$

(١٥) الطرف الأيمن $= (5+4\omega)^3 \times (5+4\omega^2)^3$

$$= [(5+4\omega)(5+4\omega^2)]^3$$

$$= (25+20\omega^2+20\omega+16)^3$$

$$= (41+20(-1))^3$$

$$= (21)^3 = 9261 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٦) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{\omega}{2+3\omega} - \frac{\omega^2}{2+3\omega^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\omega(2+3\omega^2)-\omega^2(2+3\omega)}{(2+3\omega)(2+3\omega^2)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2\omega+3\omega^3-2\omega^2-3\omega^3}{4+6\omega^2+6\omega+9\omega^3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2(\omega-\omega^2)}{13+6(-1)}\right)^2 = \left(\frac{2\times\sqrt{3}\,\text{ت}}{7}\right)^2$$

$$= \frac{-12}{49} = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٧) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{1}{1+2\omega^2} - \frac{1}{1+2\omega}\right)^4$$

$$= \left(\frac{(1+2\omega)-(1+2\omega^2)}{(1+2\omega^2)(1+2\omega)}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2\omega-2\omega^2}{1+2\omega+2\omega^2+4\omega^3}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2(\omega-\omega^2)}{5+2(-1)}\right)^4 = \left(\frac{2\times\sqrt{3}\,\text{ت}}{3}\right)^4$$

$$= \frac{16\times 9}{81} = \frac{16}{9} = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٨) الطرف الأيمن

$$= (5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3\omega+2\omega^2}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3\omega+2(-1-\omega)}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{\omega-2}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{2-\omega}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{2-\omega+2+\omega}{(2+\omega)(2-\omega)}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{4}{4-\omega^2}\right)$$

$$= (5+\omega)\left(\frac{4}{4-(-1-\omega)}\right) = \left(\frac{4\times(5+\omega)}{5+\omega}\right)$$

$$= 4 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(١٩) الطرف الأيمن $= \left(5 - \frac{5}{1+\omega^2} + \frac{3}{\omega^2}\right)^6$

$$= \left(5 - \frac{5}{-\omega} + \frac{3}{\omega^2}\right)^6$$

$$= (5+5\omega^2+3\omega)^6$$

$$= (-5\omega+3\omega)^6 = (-2\omega)^6$$

$$= 64\,\omega^6 = 64 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢٠) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{12-3\omega^2}{12\omega-3} - \frac{17-11\omega}{17\omega^2-14}\right)^{4\text{ن}}$$

$$= \left(\frac{\omega^2(12\omega-3)}{(12\omega-3)} - \frac{\omega(17\omega^2-14)}{(17\omega^2-14)}\right)^{4\text{ن}}$$

$$= (\omega^2-\omega)^{4\text{ن}} = \left[(\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^4\right]^{\text{ن}}$$

$$= 9^{\text{ن}} = 3^{2\text{ن}} = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢١) الطرف الأيمن

$$= \frac{\text{س} + \text{ص}\,\omega}{\text{س}\,\omega^2 + \text{ص}} + \frac{\text{ع}\,\omega^2 + \text{ل}}{\text{ع} + \text{ل}\,\omega}$$

$$= \frac{\omega(\text{س}\,\omega^2 + \text{ص})}{(\text{س}\,\omega^2 + \text{ص})} + \frac{\omega^2(\text{ع} + \text{ل}\,\omega)}{(\text{ع} + \text{ل}\,\omega)}$$

$$= \omega + \omega^2 = -1 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢٢) الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{\text{أ} + \text{ب}\,\omega + \text{جـ}\,\omega^2}{\text{أ}\,\omega^2 + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^2 + \text{ب}\,\omega}{\text{أ} + \text{جـ}\,\omega + \text{ب}\,\omega^2}\right)^8$$

$$= \left(\frac{\omega(\text{أ}\,\omega^2 + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega)}{\omega^2 \ldots}\right.$$

$$\left. - \frac{\omega^2(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{جـ}\,\omega)}{(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{جـ}\,\omega)}\right)^8$$

$$= (\omega - \omega^2)^8 = \left((\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^2\right)^4$$

$$= (-3)^4 = 81 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢٣) الطرف الأيمن

$$= \left(\text{س} + \frac{\text{ص}}{\omega}\right)\left(\text{س} + \frac{\text{ص}}{\omega^2}\right)$$

$$= (\text{س} + \text{ص}\,\omega^2)(\text{س} + \text{ص}\,\omega)$$

$$= \text{س}^2 + \text{س ص}\,\omega + \text{س ص}\,\omega^2 + \text{ص}^2\,\omega^3$$

$$= \text{س}^2 + \text{س ص}(\omega + \omega^2) + \text{ص}^2$$

$$= \text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2$$

$$= \text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2 + \text{س ص} - \text{س ص}$$

$$= (\text{س} - \text{ص})^2 + \text{س ص} = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢٤) الطرف الأيمن

$$= (\text{أ} + \text{ب}\,\omega + \text{أ}\,\omega^2)(\text{أ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}\,\omega^4)$$

$$= \left(\text{ب}\,\omega + \text{أ}(-\omega)\right)\left(\text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}(-\omega^2)\right)$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})\,\omega \times (\text{ب} - \text{أ})\,\omega^2$$

$$= \omega^3(\text{ب} - \text{أ})^2 = (\text{ب} - \text{أ})^2 = \text{الطرف الأيسر.}$$

٥

(١) الطرف الأيمن

$$= (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$$

$$= (1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)$$

$$= (-\omega^2)(-\omega)(2)(-\omega^2)(-\omega)$$

$$= 2\,\omega^6 = 2 = \text{الطرف الأيسر.}$$

(٢) الطرف الأيمن

$$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$$

$$= (1-\omega)(1-\omega^2) \ldots$$

١٢

$\because \omega = \text{جتا}\frac{2\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 1 + \omega = 1 + \text{جتا}\frac{2\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{2\pi}{3}$

$= 2\,\text{جتا}^2\frac{\pi}{3} + 2\,\text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\,\text{جتا}\frac{\pi}{3}$

$= 2\,\text{جتا}\frac{\pi}{3}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\right)$

$= \left(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore (1+\omega)^{\text{ن}} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\right)^{\text{ن}}$

$\therefore (1+\omega)^{\text{ن}} = \left(\text{جتا}\frac{\text{ن}\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\text{ن}\pi}{3}\right)$

١٣

$\text{س} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$

وهى أحد جذرى الواحد الصحيح غير الحقيقيين ω ، ω^2

بفرض أن : $\text{س} = \omega$

بالتعويض فى الطرف الأيمن $= \omega^{10} + \omega^{5} + 1$

$= \omega + \omega^2 + 1 =$ صفر

أ، $\text{س} = \omega^2$

الطرف الأيمن $= (\omega^2)^{10} + (\omega^2)^{5} + 1$

$= \omega^{20} + \omega^{10} + 1 = \omega^2 + \omega + 1$

= صفر

$\therefore \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ أحد حلول المعادلة.

١٤

$\because \text{س} = \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$

$\therefore$ س هى أحد جذور الواحد الصحيح غير الحقيقيين ω ، ω^2

بفرض أن : $\text{س} = \omega$

$\omega^6 + 6\omega^5 + 15\omega^4 + 20\omega^3 + 15\omega^2 + 6\omega$

$= 1 + 6\omega^2 + 15\omega + 20 + 15\omega^2 + 6\omega$

$= 21\omega^2 + 21\omega + 21 = 21(\omega^2 + \omega + 1)$

= صفر

أ، $\text{س} = \omega^2$

$\therefore (\omega^2)^6 + 6(\omega^2)^5 + 15(\omega^2)^4 + 20(\omega^2)^3$

$+ 15(\omega^2)^2 + 6\omega^2$

$= \omega^{12} + 6\omega^{10} + 15\omega^{8} + 20\omega^{6} + 15\omega^{4}$

$+ 6\omega^2$

$= 1 + 6\omega + 15\omega^2 + 20 + 15\omega + 6\omega^2$

$= 21\omega^2 + 21\omega + 21$

$= 21(\omega^2 + \omega + 1) =$ صفر

$\therefore \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ تحقق المعادلة.

١٥

الطرف الأيمن $= 3(\omega^2)^{11} + 2(\omega^2)^{8} + 5(\omega^2)^{7} + 5$

$= 3\omega^{22} + 2\omega^{16} + 5\omega^{14} + 5$

$= 3\omega + 2\omega + 5\omega^2 + 5$

$= 5\omega + 5\omega^2 + 5$

$= 5(\omega^2 + \omega + 1)$

= صفر = الطرف الأيسر.

١٦

① (د)	② (أ)	③ (جـ)	④ (أ)	⑤ (جـ)
⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (أ)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (ب)
⑯ (أ)	⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
(٢١) (ب)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (د)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (د)	(٢٧) (د)	(٢٨) (جـ)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)

١٧

① نفرض أن : $\text{ع}^2 = \omega$

$\therefore \text{ع} = \pm\sqrt{\omega} = \pm\sqrt{\omega^4} = \pm\omega^2$

② بفرض أن : $\text{ع}^2 = 1 + \omega = -\omega^2$

$\therefore \text{ع} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\sqrt{\omega^2\,\text{ت}^2} = \pm\omega\,\text{ت}$

١٨

① المجموع $= 1 + \omega\,\text{ت} + 1 + \omega^2\,\text{ت}$

$= 2 + \text{ت}(\omega + \omega^2) = 2 - \text{ت}$

حاصل الضرب $= (1 + \omega\,\text{ت})(1 + \omega^2\,\text{ت})$

$= 1 + \omega\,\text{ت} + \omega^2\,\text{ت} + (-1)$

$= -\text{ت}$

المعادلة هى : $\text{س}^2 - (2 - \text{ت})\,\text{س} - \text{ت} = 0$

② المجموع $= \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega^2}$

$= \frac{1}{-\omega^2} + \frac{1}{-\omega} = -\omega - \omega^2 = 1$

حاصل الضرب $= \frac{1}{1+\omega} \times \frac{1}{1+\omega^2}$

$= \frac{1}{-\omega^2} \times \frac{1}{-\omega}$

$= (-\omega)(-\omega^2) = 1$

المعادلة هى : $\text{س}^2 - \text{س} + 1 = 0$

③ المجموع $= (1 + \omega - \omega^2)^3 + (1 - \omega + \omega^2)^3$

$= (-\omega^2 - \omega^2)^3 + (-\omega - \omega)^3$

$= -8\omega^6 + 1(-8\omega^3)$

$= -8 - 8 = -16$

حاصل الضرب $= (1 + \omega - \omega^2)^3 \times (1 - \omega + \omega^2)^3$

$= (-2\omega^2)^3 \times (-2\omega)^3$

$= -8\omega^6 \times -8\omega^3 = 64$

المعادلة هى : $\text{س}^2 + 16\,\text{س} + 64 = 0$

④ المجموع

$= (2\omega + 2\omega^2 - \omega^3)^3$

$+ (2 - 2\omega - 2\omega^2)^3$

$= (-2 - 1)^3 + (2 - 2(-1))^3$

$= -27 + 64 = 37$

حاصل الضرب

$= (2\omega + 2\omega^2 - \omega^3)^3 \times (2 - 2\omega - 2\omega^2)^3$

$= (-2 - 1)^3 \times (2 + 2)^3$

$= -27 \times 64 = -1728$

المعادلة هى : $\text{س}^2 - 37\,\text{س} - 1728 = 0$

⑤ المجموع

$= \frac{3+\omega}{2-\omega} + \frac{3+\omega^2}{2-\omega^2}$

$= \frac{6 - 3\omega^2 + 2\omega - 1 + 6 + 2\omega^2 - 3\omega - 1}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3}$

$= \frac{10 - \omega^2 - \omega}{5 - 2\omega^2 - 2\omega} = \frac{10 + 1}{5 + 2} = \frac{11}{7}$

حاصل الضرب $= \frac{3+\omega}{2-\omega} \times \frac{3+\omega^2}{2-\omega^2}$

$= \frac{9 + 3\omega^2 + 3\omega + 1}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + 1}$

$= \frac{10 - 3}{5 + 2} = \frac{7}{7} = 1$

المعادلة هى : $\text{س}^2 - \frac{11}{7}\,\text{س} + 1 = 0 \quad (\times 7)$

$7\,\text{س}^2 - 11\,\text{س} + 7 = 0$

⑥ $\because \left(1 - (1+\omega)^{-1}\right)^{-1}$

$= \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^{-1} = (1+\omega)^{-1} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$

، $\left(1 - (1+\omega^2)^{-1}\right)^{-1}$

$= \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{-1} = (1+\omega^2)^{-1} = \frac{1}{-\omega} = -\omega^2$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= -\omega - \omega^2 = -(\omega + \omega^2) = 1$

، حاصل ضرب الجذرين $= (-\omega)(-\omega^2)$

$= \omega^3 = 1$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^2 - \text{س} + 1 = 0$

١٩

$\text{ع} = (2\omega^4 + 2\omega^2 + 3)$

$+ \text{ت}(5\sqrt{3}\,\omega^3 + 4\sqrt{3}\,\omega^2 + 4\sqrt{3}\,\omega)$

$= (2\omega + 2\omega^2 + 3)$

$+ \text{ت}(5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,\omega^2 + 4\sqrt{3}\,\omega)$

$= (-2 + 3) + \text{ت}(5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}\,\text{ت}$

$|\text{ع}| = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\text{ع} = 2\left(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\right)$

$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\frac{\pi}{3} + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\frac{\pi}{3} + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$

عند $\text{ر} = 0$

$\therefore$ الجذر الأول $= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{6} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{6}\text{ت}}$

عند $\text{ر} = 1$

$\therefore$ الجذر الثانى $= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{7\pi}{6} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{-5\pi}{6} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\frac{-5\pi}{6}\text{ت}}$

٢٠

$\text{ع} = 2(\omega + \text{ت})(\omega^2 + \text{ت})$

$= 2\left(\omega^3 + \omega\,\text{ت} + \omega^2\,\text{ت} + (-1)\right)$

$= 2\left(\text{ت}(\omega + \omega^2)\right) = -2\,\text{ت}$ (الجبرية)

$\text{ع} = 2\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-\pi}{2}\right)$ (المثلثية)

$\text{ع} = 2\,\text{هـ}^{\frac{-\pi}{2}\text{ت}}$ (الأسية)

$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$

عند $\text{ر} = 0$

$\therefore$ الجذر الأول $= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-\pi}{4}\right)$

عند $\text{ر} = 1$

$\therefore$ الجذر الثانى $= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{3\pi}{4} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{3\pi}{2}\right)$

٢١

$\text{ع} = \frac{1+\omega}{(1-\text{ت})^2} + \frac{1-\omega}{(1+\text{ت})^2} = \frac{-\omega^2}{-2\text{ت}} + \frac{1-\omega}{2\text{ت}}$

$= \frac{\omega^2}{2\text{ت}} + \frac{1-\omega}{2\text{ت}} = \frac{\omega^2 + 1 - \omega}{2\text{ت}}$

$= \frac{-\omega - \omega}{2\text{ت}} = \frac{-2\omega}{2\text{ت}} = \text{ت}\,\omega$

$\therefore \text{ع} = \text{ت}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{ت}$ (الربع الثالث)

$|\text{ع}| = 1$ ، $\theta = -\pi + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-5\pi}{6}$

$\therefore \text{ع} = \text{جتا}\frac{-5\pi}{6} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-5\pi}{6}$

$\therefore \text{ع}^{\frac{1}{2}} = \left(\text{جتا}\frac{\frac{-5\pi}{6} + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\frac{-5\pi}{6} + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$

عند $\text{ر} = 0$

$\therefore$ الجذر الأول $= \text{جتا}\frac{-5\pi}{12} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-5\pi}{12}$

عند $\text{ر} = 1$

$\therefore$ الجذر الثانى $= \text{جتا}\frac{7\pi}{12} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{7\pi}{12}$

٢٢

① $(1 - \text{ت})(\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})$

$= 9\left(\frac{1}{2 - 3\omega^2} + \frac{1}{5 + 3\omega^2}\right)$

$= 9\left(\frac{5 + 3\omega^2 + 2 - 3\omega^2}{10 + 6\omega^2 - 15\omega^2 - 9\omega^4}\right)$

$= 9\left(\frac{7}{10 - 9\omega - 9\omega^2}\right) = 9\left(\frac{7}{10 + 9}\right) = \frac{63}{19}$

$\therefore \text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \frac{63}{19}\left(\frac{1}{1-\text{ت}} \times \frac{1+\text{ت}}{1+\text{ت}}\right)$

$= \frac{63}{19}\left(\frac{1+\text{ت}}{1+1}\right) = \frac{63}{38}(1 + \text{ت})$

$\therefore \text{س} = \frac{63}{38}$ ، $\text{ص} = \frac{63}{38}$

② $(\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})(1 - 3\text{ت})$

$= 37\left(\frac{1}{3 - 4\omega^2} + \frac{1}{7 + 4\omega^2}\right)$

$= 37\left(\frac{7 + 4\omega^2 + 3 - 4\omega^2}{(3 - 4\omega^2)(7 + 4\omega^2)}\right)$

$= 37\left(\frac{10}{21 + 12\omega^2 - 28\omega^2 - 16\omega^4}\right)$

$= \frac{37 \times 10}{(21 - 16\omega - 16\omega^2)} = \frac{370}{21 + 16} = 10$

$\therefore \text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \frac{10}{1 - 3\text{ت}} \times \frac{1 + 3\text{ت}}{1 + 3\text{ت}}$

$= \frac{10(1 + 3\text{ت})}{1 + 9} = 1 + 3\text{ت}$

$\therefore \text{س} = 1$ ، $\text{ص} = 3$

③ $(\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})(2 + \text{ت})^2$

$= \frac{1}{(1+\omega)^2} + \frac{1}{(1+\omega^2)^2} = \frac{1}{(-\omega^2)^2} + \frac{1}{(-\omega)^2}$

$= \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \omega^2 + \omega = -1$

$\therefore \text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \frac{-1}{(2 + \text{ت})^2} = \frac{-1}{4 - 1 + 4\text{ت}}$

$= \frac{-1}{3 + 4\text{ت}} \times \frac{3 - 4\text{ت}}{3 - 4\text{ت}}$

$= \frac{-3 + 4\text{ت}}{9 + 16} = \frac{-3}{25} + \frac{4}{25}\text{ت}$

$\therefore \text{س} = \frac{-3}{25}$ ، $\text{ص} = \frac{4}{25}$

٢٣

① $\text{س}^2 = 1 + \omega^2 \qquad \therefore \text{س}^2 = -\omega$

$\text{س} = \pm\sqrt{-\omega} = \pm\sqrt{-\omega^4} = \pm\omega^2\,\text{ت}$

② $4\text{س}^2 - 4\omega\,\text{س} - \omega = 0$

$\text{أ} = 4$ ، $\text{ب} = -4\omega$ ، $\text{جـ} = -\omega$

$\therefore \text{س} = \frac{-(-4\omega) \pm \sqrt{(-4\omega)^2 - 4 \times 4 \times -\omega}}{2 \times 4}$

$\therefore \text{س} = \frac{4\omega \pm \sqrt{16\omega^2 + 16\omega}}{8}$

$= \frac{4\omega \pm \sqrt{16(-1)}}{8}$

$\text{س} = \frac{4\omega \pm 4\text{ت}}{8} = \frac{1}{2}\omega \pm \frac{1}{2}\text{ت}$

③ $(2\text{س} + 1)^6 - 2(2\text{س} + 1)^3 + 1 = 0$

$\left[(2\text{س} + 1)^3 - 1\right]^2 = 0$

$\therefore (2\text{س} + 1)^3 - 1 = 0$

$(2\text{س} + 1)^3 = 1$

، $\because$ الجذور التكعيبية للعدد ١ هى ١ ، ω ، ω^2

$\therefore 2\text{س} + 1 = 1$ منها $2\text{س} = 0 \quad \therefore \text{س} = 0$

$\therefore 2\text{س} + 1 = \omega$ منها $\text{س} = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}$

$2\text{س} + 1 = \omega^2$ منها $\text{س} = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}$

④ $(3\text{س} - 2)^6 - 9(3\text{س} - 2)^3 + 8 = 0$

$\left((3\text{س} - 2)^3 - 8\right)\left((3\text{س} - 2)^3 - 1\right) = 0$

فى حالة $(3\text{س} - 2)^3 = 8$

، $\because$ الجذور التكعيبية للعدد ٨ هى ٢ ، 2ω ، $2\omega^2$

$\therefore 3\text{س} - 2 = 2$ منها $\text{س} = \frac{4}{3}$

أ، $3\text{س} - 2 = 2\omega$

منها $\text{س} = \frac{2\omega + 2}{3} = \frac{-2\omega^2}{3}$

أ، $3\text{س} - 2 = 2\omega^2$

منها $\text{س} = \frac{2\omega^2 + 2}{3} = \frac{-2\omega}{3}$

وفى حالة $(3\text{س} - 2)^3 = 1$

، $\because$ الجذور التكعيبية للعدد ١ هى ١ ، ω ، ω^2

$\therefore 3\text{س} - 2 = 1$ منها $\text{س} = \frac{3}{3} = 1$

أ، $3\text{س} - 2 = \omega$ منها $\text{س} = \frac{\omega + 2}{3}$

أ، $3\text{س} - 2 = \omega^2$ منها $\text{س} = \frac{\omega^2 + 2}{3}$

[illegible]

$+ \left(\omega^{12} + \frac{1}{\omega^{12}}\right)^2$

$= (\omega + \omega^2)^2 + (\omega^2 + \omega)^2$

$+ (1 + 1)^2 + \cdots + (1 + 1)^2$

$= (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2$

$+ (-1)^2 + (2)^2 = 12$

⑤ ∵ المقدار

$= \sum_{\text{ن}=1}^{12} \left[\text{جتا}\left(\frac{2\pi\,\text{ن}}{3}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{2\pi\,\text{ن}}{3}\right)\right]$

$= \sum_{\text{ن}=1}^{12} \left(\text{جتا}\frac{2\pi}{3} + \text{ت جا}\frac{2\pi}{3}\right)^{\text{ن}}$

، ∵ $\text{جتا}\frac{2\pi}{3} + \text{ت جا}\frac{2\pi}{3} = \omega$ أو ω^2

∴ المقدار $= \sum_{\text{ن}=1}^{12} \omega^{\text{ن}} = \omega + \omega^2 + \omega^3$

$+ \cdots + \omega^{12} =$ صفر

أو المقدار $= \sum_{\text{ن}=1}^{12} \omega^{2\text{ن}} = \omega^2 + \omega^4 + \omega^6$

$+ \cdots + \omega^{24} =$ صفر

⑥ $\sum_{\text{ر}=0}^{100} {}^{100}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\omega)^{\text{ر}}\,(2 + \omega^2)^{100-\text{ر}}$

$= ((2 + \omega^2) + \omega)^{100}$

$= (1 + 1 + \omega + \omega^2)^{100} = (1)^{100} = 1$

⑦ ∵ $|\omega|\,|\text{ع}^2| - 5\,|\text{ع}| = 14$

∴ $|\text{ع}|^2 - 5\,|\text{ع}| - 14 = 0$

∴ $(|\text{ع}| - 7)(|\text{ع}| + 2) = 0$

∴ $|\text{ع}| = 7$ أو $|\text{ع}| = -2$ (مرفوض)

∴ $|\text{ع}|^2 = \text{ع}\,\bar{\text{ع}} = 49$

∴ $\left|\frac{2\bar{\text{ع}} + 49}{\text{ع} + 2}\right| = \left|\frac{2\bar{\text{ع}} + \text{ع}\,\bar{\text{ع}}}{\text{ع} + 2}\right|$

$= \left|\frac{\bar{\text{ع}}(\text{ع} + 2)}{\text{ع} + 2}\right| = |\bar{\text{ع}}| = 7$

[illegible]

∵ $\text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$

∴ $\text{س} - 1 = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$

∴ $(\text{س} - 1)^2 = (\omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}})^2$

∴ $(\text{س} - 1)^2 = \omega^{2\text{س}} + 2\omega^{3\text{س}} + \omega^{4\text{س}}$

$= \omega^{2\text{س}} + 2 + \omega^{\text{س}} = \text{س} + 1$

∴ $\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = \text{س} + 1$

∴ $\text{س}^2 - 3\text{س} = 0$

∴ $\text{س}(\text{س} - 3) = 0$

∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٣

∴ م.ح = {٣}

٣٢

$\text{ع} = [(2\omega^2 + \text{ت}) - (3\text{ت}^2 - 2\omega)]^{10}$

$= [2\omega^2 + \text{ت} - 3\text{ت}^2 + 2\omega]^{10}$

$= [2(\omega^2 + \omega) + (\text{ت} + 3)]^{10}$

$= (-2 + \text{ت} + 3)^{10} = (1 + \text{ت})^{10}$

$= [(1 + \text{ت})^2]^5 = (2\text{ت})^5 = 2^5\,\text{ت}^5$

$= 32\,\text{ت}$ (الصورة الجبرية)

$= 32\left(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right)$ (الصورة المثلثية)

٢٤

مجموع العددين $= (1 + \omega\,\text{ت}) + (1 + \omega^2\,\text{ت})$

$= 2 + \text{ت}(\omega^2 + \omega) = 2 - \text{ت}$

حاصل ضربهما $= (1 + \omega\,\text{ت})(1 + \omega^2\,\text{ت})$

$= 1 + \omega^2\,\text{ت} + \omega\,\text{ت} - 1$

$= (\omega^2 + \omega)\,\text{ت} = -\text{ت}$

∴ المعادلة التي جذراها $(1 + \omega\,\text{ت})$ ، $(1 + \omega^2\,\text{ت})$

هي : $\text{س}^2 - (2 - \text{ت})\,\text{س} - \text{ت} = 0$

٢٥

$(1 - \omega^2)^{3\text{ن}} = [(1 - \omega^2)(1 - \omega^2)^2]^{\text{ن}}$

$= [(1 - \omega^2)(1 - 2\omega^2 + \omega^4)]^{\text{ن}}$

$= [(1 - \omega^2)(-3\omega^2)]^{\text{ن}}$

$= (-3\omega^2 + 3\omega)^{\text{ن}}$

$(\omega - 1)^{3\text{ن}} = [(\omega - 1)(\omega - 1)^2]^{\text{ن}}$

$= [(\omega - 1)(\omega^2 - 2\omega + 1)]^{\text{ن}}$

$= [(\omega - 1)(-3\omega)]^{\text{ن}}$

$= [-3\omega^2 + 3\omega]^{\text{ن}}$

∴ الطرفان متساويان.

حل آخر :

الطرف الأيمن $= (1 - \omega^2)^{3\text{ن}} = (\omega^3 - \omega^2)^{3\text{ن}}$

$= (\omega^2)^{3\text{ن}}(\omega - 1)^{3\text{ن}}$

$= 1 \times (\omega - 1)^{3\text{ن}} =$ الطرف الأيسر.

٢٦

الطرف الأيمن $= (2 + 5\omega + 2\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (5\omega + 2(1 + \omega^2))^{\text{ن}}$

$= (5\omega - 2\omega)^{\text{ن}} = (3\omega)^{\text{ن}}$

الطرف الأيسر $= (2 + 2\omega + 5\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (2(1 + \omega) + 5\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (-2\omega^2 + 5\omega^2)^{\text{ن}} = (3\omega^2)^{\text{ن}}$

∴ $(3\omega)^{\text{ن}} = (3\omega^2)^{\text{ن}}$ ∴ $3^{\text{ن}}\omega^{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}\omega^{2\text{ن}}$

∴ $\omega^{\text{ن}} = \omega^{2\text{ن}}$ منها $\omega^{2\text{ن}-\text{ن}} = 1$

∴ $\omega^{\text{ن}} = 1$

∴ ن ∈ {… ، −٦ ، −٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، …}

٢٧

$\sum_{\text{ر}=0}^{10} (1 + \omega^{\text{ر}} + \omega^{2\text{ر}})$

$= \sum_{\text{ر}=0}^{10} 1 + \sum_{\text{ر}=0}^{10} \omega^{\text{ر}} + \sum_{\text{ر}=0}^{10} \omega^{2\text{ر}}$

$= 11 + [1 + \omega + \omega^2 + \ldots\, \omega^{10}]$

$+ [1 + \omega^2 + \omega^4 + \ldots\, \omega^{20}]$

$= 11 + \frac{1 \times (\omega^{11} - 1)}{\omega - 1} + \frac{1 \times ((\omega^2)^{11} - 1)}{\omega^2 - 1}$

(مجموع متتابعات هندسية)

$= 11 + \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} + \frac{\omega - 1}{\omega^2 - 1}$

$= 11 + \frac{\omega + 1}{1} + \frac{1}{\omega + 1}$

$= 11 + (-\omega^2) + \frac{1}{(-\omega^2)}$

$= 11 - \omega^2 - \omega = 11 + 1 = 12$

حل آخر :

$\sum_{\text{ر}=0}^{10} (1 + \omega^{\text{ر}} + \omega^{2\text{ر}})$

$= (1 + 1 + 1) + (1 + \omega + \omega^2)$

$+ (1 + \omega^2 + \omega^4) + (1 + \omega^3 + \omega^6) + \cdots$

$+ (1 + \omega^9 + \omega^{18}) + (1 + \omega^{10} + \omega^{20})$

$= 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0$

$= 12$

٢٨

① الطرف الأيمن

$= \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$= \text{ب} + \omega^2\,\text{حـ} + \text{ب}\,\omega + \text{حـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{حـ}\,\omega$

$= \text{ب}(1 + \omega + \omega^2) + \text{حـ}(1 + \omega + \omega^2)$

= صفر = الطرف الأيسر.

② الطرف الأيمن

$= \text{ع}_1\text{ع}_2 + \text{ع}_2\text{ع}_3 + \text{ع}_3\text{ع}_1$

$= (\text{ب} + \omega^2\,\text{حـ})(\text{ب}\,\omega + \text{حـ})$

$+ (\text{ب}\,\omega + \text{حـ})(\text{ب}\,\omega^2 + \text{حـ}\,\omega)$

$+ (\text{ب} + \omega^2\,\text{حـ})(\text{ب}\,\omega^2 + \text{حـ}\,\omega)$

$= \text{ب}^2\,\omega + \text{ب حـ} + \text{ب حـ} + \text{حـ}^2\,\omega^2 + \text{ب}^2$

$+ \text{ب حـ}\,\omega^2 + \text{ب حـ}\,\omega^2 + \text{حـ}^2\,\omega + \text{ب}^2\,\omega^2$

$+ \text{ب حـ}\,\omega + \text{ب حـ}\,\omega + \text{حـ}^2$

$= \text{ب}^2(\omega + 1 + \omega^2) + \text{ب حـ}(1 + 1 + \omega^2$

$+ \omega^2 + \omega + \omega) + \text{حـ}^2(\omega^2 + \omega + 1)$

= صفر = الطرف الأيسر.

٢٩

$\text{ع}_1^3 - 3\,\text{ع}_1^2\,\text{ع}_2 + 3\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2^2 - \text{ع}_2^3$

$= (\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^3 = ((\text{س} + \omega\,\text{ص}) - (\text{س} - \omega\,\text{ص}))^3$

$= (2\omega\,\text{ص})^3 = 8\,\omega^3\,\text{ص}^3 = 8\,\text{ص}^3$

٣٠

① (ب) ② (أ) ③ (أ) ④ (ب)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (أ)

إرشادات لحل رقم **٣٠** :

① ∵ |أ| = أ إذا كان : أ = ٢ أو أ = ١

∴ $\text{س} + 2\omega + 2\omega^2 = 2$

ومنها $\text{س} = 2 - 2(\omega + \omega^2) = 4$

أو $\text{س} + 2\omega + 2\omega^2 = 1$

ومنها $\text{س} = 1 - 2(\omega + \omega^2) = 3$

② ∵ $\text{ع} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{ت}$

∴ $\text{ت ع} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ت} = \omega$

∴ $\text{ع} = \frac{\omega}{\text{ت}}$

∴ $\text{ع}^{69} = \frac{\omega^{69}}{\text{ت}^{69}} = \frac{1}{\text{ت}} = -\text{ت}$

③ ∵ $(1 + \text{س} + \text{س}^2)^{\text{ن}}$

$= \text{أ}_0 + \text{أ}_1\,\text{س} + \text{أ}_2\,\text{س}^2 + \ldots + \text{أ}_{2\text{ن}}\,\text{س}^{2\text{ن}}$

وبوضع س = ω

∴ $\text{أ}_0 + \text{أ}_1\,\omega + \text{أ}_2\,\omega^2 + \ldots + \text{أ}_{2\text{ن}}\,\omega^{2\text{ن}}$

$= (1 + \omega + \omega^2)^{\text{ن}} =$ صفر

④ ∵ $\text{س}^2 + \text{س} + 1 = 0$

∴ $\text{س} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2} = \omega$ أو ω^2

بوضع س = ω

∴ المقدار $= \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right)^2$

$+ \left(\omega^3 + \frac{1}{\omega^3}\right)^2 + \cdots + \left(\omega^6 + \frac{1}{\omega^6}\right)^2$

$= (\omega + \omega^2)^2 + (\omega^2 + \omega)^2$

$+ (1 + 1)^2 + \cdots + (1 + 1)^2$

$= (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2$

$+ (-1)^2 + (2)^2$

$= 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 = 12$

إجابات تمارين ١٥

١

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (أ)

⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (أ) ⑨ (جـ) ⑩ (ب)

⑪ (ب) ⑫ (أ) ⑬ (أ) ⑭ (أ) ⑮ (د)

⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (أ) ⑳ (د)

㉑ (د) ㉒ (د) ㉓ (ب) ㉔ (أ) ㉕ (جـ)

㉖ (أ) ㉗ (د) ㉘ (جـ) ㉙ (ب) ㉚ (جـ)

٢

① $\begin{vmatrix} 615 & 616 \\ 617 & 618 \end{vmatrix}$ بإجراء (ص٢ − ص١)

$= \begin{vmatrix} 615 & 616 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ (بأخذ ٢ مشترك من ص٢)

$= 2\begin{vmatrix} 615 & 616 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ − ع٢)

$= 2\begin{vmatrix} -1 & 616 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times -1 = -2$

② $\begin{vmatrix} 1985 & 1984 \\ 1987 & 1986 \end{vmatrix}$ بإجراء (ص٢ − ص١)

$= \begin{vmatrix} 1985 & 1984 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ بأخذ (٢) مشترك من ص٢

$= 2\begin{vmatrix} 1985 & 1984 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ بإجراء (ع١ − ع٢)

$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1984 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 = 2$

③ $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ بإجراء (ع١ + ع٣)

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ تبديل ص١ ، ص٣

$= -\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= -(5 \times 3 \times -2) = 30$

④ $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix}$ بأخذ مشترك (٢) من ع٣

$= 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times$ صفر = صفر لأن (ع١ = ع٣)

⑤ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ بإجراء (ع٣ − ع٢)

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع١ = ع٣)

⑥ $\begin{vmatrix} 76 & 78 & 80 \\ 82 & 88 & 94 \\ 86 & 96 & 106 \end{vmatrix}$ بإجراء (ع٣ − ع٢) ثم (ع٢ − ع١)

$= \begin{vmatrix} 76 & 2 & 2 \\ 82 & 6 & 6 \\ 86 & 10 & 10 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع٢ = ع٣)

$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+5 & 4 & 5 \\ 3+2 & 3 & 2 \\ 5-2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

لاحظ أن المحدد الثاني = صفر لأن (ع١ = ع٣)

٤

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ تبديل ص٢ مع ص١

$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ٤ ص١) ثم (ص٣ − ٣ ص١)

$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -18 \\ 0 & -7 & -17 \end{vmatrix}$ بإجراء (ص٣ − ٧ ص٢)

$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 109 \end{vmatrix} = -(1 \times -1 \times 109) = 109$

٥

① $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -8 & 5 \\ 4 & 8 & -6 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 4 & 8 & -6 \\ 7 & 14 & 8 \end{vmatrix}$ بأخذ مشترك (٢) من ع٢

$= 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times$ صفر = صفر لأن (ع١ = ع٢)

② $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 12 & 20 & 24 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 20 & 24 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

تبديل ص١ ، ص٢ في المحدد الثاني

$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -8 & 4 & -12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

بأخذ ٤ مشترك من ص١ ثم ضرب ٤ × ص٢

$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ = صفر (جميع عناصر ص٢ = ٠)

③ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

(بتدوير المحدد الأول) ، (أخذ ٢ مشترك من ع١ ، ٢ مشترك من ع٣ من المحدد الثاني)

$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع٢ = ع٣)

④ $\begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ٧ \\ ٦ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥- & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ٧ \\ ١١ & ٣ & ١- \\ ٤ & ٥- & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ٣ \\ ١٧ & ٥ & ٢٠- \\ ٤ & ٥- & ٣- \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ٧ \\ ١٧ & ٥ & ٣- \\ ٤ & ٥- & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ٣ \\ ١٧ & ٥ & ٢٠ \\ ٤ & ٥- & ٣- \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١٠ & ٨ & ١٠ \\ ١٧ & ٥ & ١٧ \\ ٤ & ٥- & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ع_١ = ع_٣$)

٦

بوضع س = ١

$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٣- & ١ \\ ٢ & ٧ & ٥ \\ ١٠ & ٦- & ٢ \end{vmatrix}$ (بأخذ ٢ مشترك من $ص_٣$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ٥ & ٣- & ١ \\ ٢ & ٧ & ٥ \\ ٥ & ٣- & ١ \end{vmatrix}$

= ٢ × صفر = صفر (لأن $ص_١ = ص_٣$)

∴ س − ١ عامل من عوامل المحدد

٧

① بوضع س = ٠ ينتج أن Δ = ٠

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٢ & ك \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ ، ($ص_٢ - ك\, ص_١$)

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ك - ٢ & ٢ - ٣ك & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

∴ (٢ − ٣ك) − ٢ (٣ − ك) = ٠

∴ ك = −٤

② بوضع س = ٠ ينتج أن Δ = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ك \\ ٣ & ك - ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء ($ص_١ - ص_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٣ & ك - ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

∴ ك [ك − ٢ − ٣] = ٠

∴ ك (ك − ٥) = ٠ ∴ ك = ٠ أو ك = ٥

③ بوضع س = ١ ينتج أن Δ = ٠

$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١- & ١ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٠$ ، بإجراء ($ص_٢ + ص_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ك + ٢ \\ ١- & ١ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٠$

∴ −١ [ك + ٢ − ٢] = ٠ ∴ ك + ١ = ٠

∴ ك = −١

④ بوضع س = ٢ ينتج أن Δ = ٠

$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٣- & ٧ & ٦- \\ ٥ & ٢ & ك + ٢ \end{vmatrix} = ٠$

∴ (٧ك + ١٤ + ١٢) − ٥ (−٢ك − ٦ + ٣٠)

+ ٢ (−٦ − ٣٥) = ٠

∴ ك = ٨

٨

① ∵ $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ س & ١ & س \\ س & س & ١ \end{vmatrix} = ٠$ ، بإجراء ($ع_٢ - ع_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ١ & س & ٠ \\ س & ١ & س - ١ \\ س & س & ١ - س \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء ($ص_٢ + ص_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ١ & س & ٠ \\ ٢س & س + ١ & ٠ \\ س & س & ١ - س \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء ($ع_٢ - س\, ع_١$)

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢س & س + ١ - ٢س^٢ & ٠ \\ س & س - س^٢ & ١ - س \end{vmatrix} = ٠$

∴ ١ × (١ + س − ٢س²) (١ − س) = ٠

∴ (١ − س) (١ + ٢س) (١ − س) = ٠

∴ س = ١ أو س = $-\frac{١}{٢}$

② $\begin{vmatrix} ٢س & ١ & ١ \\ ١ & ٢س & ١ \\ ١ & ١ & ٢س \end{vmatrix} = ٠$

(بإجراء $ع_١ + ع_٢ + ع_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ٢س + ٢ & ١ & ١ \\ ٢س + ٢ & ٢س & ١ \\ ٢س + ٢ & ١ & ٢س \end{vmatrix} = ٠$

∴ (٢س + ٢) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢س & ١ \\ ١ & ١ & ٢س \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء ($ص_٢ - ص_١$) ، ($ص_٣ - ص_١$)

∴ ٢ (س + ١) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢س - ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢س - ١ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٢ (س + ١) (٢س − ١)² = ٠

∴ س = −١ أو س = $\frac{١}{٢}$

③ $\begin{vmatrix} س & ١ & س \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ س & ٥ & س \end{vmatrix} = ١٦$

(تبديل $ع_٢$ مع $ع_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} س & س & ١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ س & س & ٥ \end{vmatrix} = -١٦$

(بإجراء $ص_٣ - ص_١$)

∴ $\begin{vmatrix} س & س & ١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -١٦$ (بإجراء $ع_١ - ع_٢$)

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & س & ١ \\ ٢- & ٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -١٦$ (بتبديل $ص_١$ مع $ص_٢$)

∴ $\begin{vmatrix} ٢- & ٤ & ٣ \\ ٠ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ١٦$

∴ −٨س = ١٦ ∴ س = −٢

④ $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix} = س - ١$

(بإجراء $ع_١ + ع_٢ + ع_٣$)

[illegible]

---

① $\begin{vmatrix} س + ص & ع & ... \\ ع + س & ص & ... \\ س + ص & ٠ & ع \end{vmatrix}$ بإجراء ($ع_١ + ع_٢$)

$= \begin{vmatrix} س + ص + ع & س - ع & س \\ س + ص + ع & ص - ع & ص \\ س + ص + ع & ٠ & ع \end{vmatrix}$

$= (س + ص + ع) \begin{vmatrix} ١ & س - ع & س \\ ١ & ص - ع & ص \\ ١ & ٠ & ع \end{vmatrix}$

(بإجراء $ص_٢ - ص_١$ ، $ص_٣ - ص_١$)

$= (س + ص + ع) \begin{vmatrix} ١ & س - ع & س \\ ٠ & ص - س & ص - س \\ ٠ & ع - س & ع - س \end{vmatrix}$

بأخذ (ص − س) مشترك من $ص_٢$

، (ع − س) من $ص_٣$

$= (س + ص + ع)\,(ص - س)\,(ع - س) \begin{vmatrix} ١ & س - ع & س \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ص_٢ = ص_٣$)

② $\begin{vmatrix} ١ & جا^٢ أ & جتا^٢ أ \\ ١ & جا^٢ ب & جتا^٢ ب \\ ١ & جا^٢ حـ & جتا^٢ حـ \end{vmatrix}$ (بإجراء $ع_٢ + ع_٣$)

$= \begin{vmatrix} ١ & جا^٢ أ + جتا^٢ أ & جتا^٢ أ \\ ١ & جا^٢ ب + جتا^٢ ب & جتا^٢ ب \\ ١ & جا^٢ حـ + جتا^٢ حـ & جتا^٢ حـ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & جتا^٢ أ \\ ١ & ١ & جتا^٢ ب \\ ١ & ١ & جتا^٢ حـ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ع_١ = ع_٢$)

∴ (س + ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & س - ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & س - ٢ \end{vmatrix}$ = س − ١

(تبديل $ع_٢$ مع $ع_٣$)

∴ −(س + ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & س - ١ \\ ٠ & س - ٢ & ١ \end{vmatrix}$

= س − ١

(تبديل $ص_٢$ مع $ص_٣$)

∴ (س + ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & س - ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & س - ١ \end{vmatrix}$ = س − ١

∴ (س + ٣) (س − ٢) (س − ١) = س − ١

∴ (س − ١) [(س + ٣) (س − ٢) − ١] = صفر

∴ س = ١ أو س² + س − ٦ − ١ = ٠

∴ س² + س − ٧ = ٠ ∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$

∴ س = ١ أو $\frac{-١ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$

٩

∵ $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٢ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix}$ − ٨ = صفر

∴ س³ = ٨ ∴ م.ح = {٢ ، ٢ω ، ٢ω²}

③ $\begin{vmatrix} ل + م + ن & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix}$

(بإجراء $ع_١ + ٢ع_٢ + ع_٣$)

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ل & ن - م - ٧ل \\ ٠ & ٢م & ٢ل - ن - ٥م \\ ٠ & ن & ل - م - ٣ن \end{vmatrix}$ = صفر

④ $\begin{vmatrix} ١ & قا س & قا س \\ ١ & ظا س & قا س \\ ١ & قا س & -ظا س \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_٢ - ص_١$) ثم ($ص_٣ - ص_١$)

$= \begin{vmatrix} ١ & قا س & قا س \\ ٠ & ظا س - قا س & ٠ \\ ٠ & ٠ & -ظا س - قا س \end{vmatrix}$

= ١ (ظا س − قا س) (− ظا س − قا س)

= قا² س − ظا² س = ١

⑤ $\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & ١ + س^٢ & س ص \\ ص & س ص & ١ + ص^٢ \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_٢ - س\,(ص_١)$) ، ($ص_٣ - ص\,(ص_١)$)

$= \begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$

⑥ $\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ س^٢ & ص^٢ & س + ص \\ س^٣ & ص^٣ & س^٢ + س ص + ص^٢ \end{vmatrix}$

بأخذ س مشترك من $ع_١$ ، ص مشترك من $ع_٢$

$= س ص \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & س + ص \\ س^٢ & ص^٢ & س^٢ + س ص + ص^٢ \end{vmatrix}$

«بتدوير المحدد»

(بإجراء ($ص_٢ - ص_١$) ، ($ص_٣ - ص_١$))

$= س ص \begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ص - س & ص^٢ - س^٢ \\ ٠ & ص & س ص + ص^٢ \end{vmatrix}$

بأخذ (ص − س) مشترك من $ص_٢$

ثم ص مشترك من $ص_٣$

$= س ص^٢ (ص - س) \begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ١ & ص + س \\ ٠ & ١ & س + ص \end{vmatrix}$

= صفر (لأن $ص_٢ = ص_٣$)

⑦ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ١ - ت & -ت & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_٣ - (١ - ت)\, ص_١$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ٠ & -ت & ١- \end{vmatrix}$ بإجراء ($ص_٣ + ت\, ص_٢$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ٠ & ٠ & ٢- \end{vmatrix} = -٢$

١١

① بإجراء ($ع_٢ + ع_٣$)

∴ المحدد = $\begin{vmatrix} ١ & ب حـ & أ ب + أ حـ + ب حـ \\ ١ & أ حـ & أ ب + ب حـ + أ حـ \\ ١ & أ ب & أ حـ + ب حـ + أ ب \end{vmatrix}$

بأخذ (أ ب + أ حـ + ب حـ) عامل مشترك

= (أ ب + أ حـ + ب حـ) $\begin{vmatrix} ١ & ب حـ & ١ \\ ١ & أ حـ & ١ \\ ١ & أ ب & ١ \end{vmatrix}$

= صفر (لأن $ع_١ = ع_٣$)

② نفرض أن $\begin{vmatrix} \cdot & \text{ل} & \text{م} \\ -\text{ل} & \cdot & \text{ن} \\ -\text{م} & -\text{ن} & \cdot \end{vmatrix} = \Delta$

بأخذ عامل مشترك (−١) من ص١ ، ص٢ ، ص٣

$\therefore \Delta = (-1)^3 \begin{vmatrix} \cdot & -\text{ل} & -\text{م} \\ \text{ل} & \cdot & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & \cdot \end{vmatrix} = -\Delta$

$\therefore 2\Delta = \cdot \qquad \therefore \Delta = \cdot$

③ الأيمن = $\begin{vmatrix} 2\text{س} & 2\text{س} & 2\text{س} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+1 & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix}$

$= 2\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+1 & \text{أ}+1 & \text{ب}+1 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٣ + ص٢ + ص١)

$= 2\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب}+2 & \text{أ}+\text{ب}+2 & \text{أ}+\text{ب}+2 \end{vmatrix}$

$= 2\text{س}(\text{أ}+\text{ب}+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ صفر

(لأن ص١ = ص٣)

④ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ [illegible]

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$

= صفر (لأن ص٢ = ص٣)

⑤ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{ب} & 1 & \text{ب}-3 \\ \text{أ}\text{ب}-\text{ب} & \text{ب} & \text{جـ}-2\text{ب} \\ \text{أ}\text{جـ}-\text{أ} & \text{جـ} & 1-2\text{جـ} \end{vmatrix}$

(بإجراء ع١ − أ ع٢ ثم ع٣ + ٢ ع٢)

$= \begin{vmatrix} -\text{ب} & 1 & \text{ب} \\ -\text{أ}\text{ب} & \text{ب} & \text{جـ} \\ -\text{أ} & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$

(بأخذ (−أ) عامل مشترك من ع١)

$= -\text{أ} \begin{vmatrix} \text{ب} & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ 1 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$

= − أ × صفر = صفر لأن (ع١ = ع٣)

⑥ الأيمن = $\begin{vmatrix} (\text{س}+\text{ص})^2 & \text{س}^2+\text{ص}^2 & 2\text{س}\text{ص} \\ (\text{ع}+\text{ل})^2 & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & 2\text{ع}\text{ل} \\ (\text{م}+\text{ن})^2 & \text{م}^2+\text{ن}^2 & 2\text{م}\text{ن} \end{vmatrix}$

بأخذ (٢) عامل مشترك من ع٣

$= 2 \begin{vmatrix} (\text{س}+\text{ص})^2 & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{س}\text{ص} \\ (\text{ع}+\text{ل})^2 & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{ع}\text{ل} \\ (\text{م}+\text{ن})^2 & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{م}\text{ن} \end{vmatrix}$

(بإجراء ع٢ + ٢ ع٣)

$= 2 \begin{vmatrix} (\text{س}+\text{ص})^2 & (\text{س}+\text{ص})^2 & \text{س}\text{ص} \\ (\text{ع}+\text{ل})^2 & (\text{ع}+\text{ل})^2 & \text{ع}\text{ل} \\ (\text{م}+\text{ن})^2 & (\text{م}+\text{ن})^2 & \text{م}\text{ن} \end{vmatrix}$

= صفر (لأن ع١ = ع٢)

⑦ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+1 & (\text{س}+1)^2 \\ \text{ص} & \text{ص}^2+1 & (\text{ص}+1)^2 \\ \text{ع} & \text{ع}^2+1 & (\text{ع}+1)^2 \end{vmatrix}$

(بإجراء ع٢ + ٢ ع١)

$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+2\text{س}+1 & (\text{س}+1)^2 \\ \text{ص} & \text{ص}^2+2\text{ص}+1 & (\text{ص}+1)^2 \\ \text{ع} & \text{ع}^2+2\text{ع}+1 & (\text{ع}+1)^2 \end{vmatrix}$

= صفر (لأن ع٢ = ع٣)

⑧ الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & \text{س}+7 & (\text{س}+6)(\text{س}+7) \\ 1 & \text{س}+8 & (\text{س}+7)(\text{س}+8) \\ 1 & \text{س}+9 & (\text{س}+8)(\text{س}+9) \end{vmatrix}$

(بإجراء ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١)

$= \begin{vmatrix} 1 & \text{س}+7 & (\text{س}+6)(\text{س}+7) \\ \cdot & 1 & 2\text{س}+14 \\ \cdot & 2 & 4\text{س}+30 \end{vmatrix}$

بإجراء ص٣ − ٢ ص٢

$= \begin{vmatrix} 1 & \text{س}+7 & (\text{س}+6)(\text{س}+7) \\ \cdot & 1 & 2\text{س}+14 \\ \cdot & \cdot & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 1 \times 2 = 2$

⑨ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1+\text{أ} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ب} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{جـ} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ب} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & 1 \\ \cdot & 1+\text{ب} & 1 \\ \cdot & 1 & 1+\text{جـ} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١) على المحدد الأول

[illegible]

بإجراء (ص٢ − ص٣) على المحدد الثاني

$= \text{ب}\text{جـ} + \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \cdot & 1 \\ \cdot & \text{ب} & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{ب} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \text{جـ} \end{vmatrix}$

= ب جـ + أ جـ + أ ب + أ ب جـ = الطرف الأيسر.

١٢

$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع}+2 \\ \text{س} & \text{ص}+2 & \text{ع} \\ \text{س}+2 & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

(بإجراء ع١ + ع٢ + ع٣)

$= \begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+2 & \text{ص} & \text{ع}+2 \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+2 & \text{ص}+2 & \text{ع} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+2 & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

بأخذ (س + ص + ع + ٢) عامل مشترك من ع١

$= (\text{س}+\text{ص}+\text{ع}+2) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع}+2 \\ 1 & \text{ص}+2 & \text{ع} \\ 1 & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= (\text{س}+\text{ص}+\text{ع}+2) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع}+2 \\ \cdot & 2 & -2 \\ \cdot & \cdot & -2 \end{vmatrix}$

= (س + ص + ع + ٢) × (١ × ٢ × −٢)

= −٤ (س + ص + ع + ٢)

∴ −٤ (س + ص + ع + ٢) = −٤

∴ س + ص + ع + ٢ = ١

[illegible]

∴ ٤ (٢) + ٧ (١) − ١٥ = صفر (تحقق المعادلة)

وبوضع س = −٥ ، ص = ٥

∴ ٤ (−٥) + ٧ (٥) − ١٥ = صفر (تحقق المعادلة)

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٥)

١٥

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (د)
⑥ (أ)	⑦ (أ)	⑧ (ب)	⑨ (أ)	⑩ (ب)
⑪ (د)	⑫ (د)	⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (أ)
⑯ (د)	⑰ (د)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (أ)	㉕ (جـ)
㉖ (د)	㉗ (أ)	㉘ (أ)	㉙ (أ)	㉚ (ب)

١٦

① الطرف الأيمن

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\text{س} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ص} & 1 \end{vmatrix}$ [illegible]

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

[illegible]

② الأيمن = [illegible]

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ \cdot & \text{ب}-\text{أ} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\text{ب}-\text{أ} \end{vmatrix}$

$= (\text{ب}-\text{أ})(-\text{ب}-\text{أ}) = \text{أ}^2-\text{ب}^2$

③ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{أ}+\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{أ}+\text{ع} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ + ع٢ + ع٣) ثم أخذ (أ + س + ص + ع) مشترك من ع١

$= (\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & \text{أ}+\text{ص} & \text{ع} \\ 1 & \text{ص} & \text{أ}+\text{ع} \end{vmatrix}$ بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= (\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{ع} \\ \cdot & \text{أ} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \text{أ} \end{vmatrix}$

$= \text{أ}^2 (\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع})$

④ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س}+1 & 2 & 3 \\ 2 & \text{س}+3 & 1 \\ 2 & 1 & \text{س}+2 \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ + ع٢ + ع٣)

$= \begin{vmatrix} \text{س}+6 & 2 & 3 \\ \text{س}+6 & \text{س}+3 & 1 \\ \text{س}+6 & 1 & \text{س}+2 \end{vmatrix}$

بأخذ (س + ٦) عامل مشترك من ع١

$= (\text{س}+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \text{س}+3 & 1 \\ 1 & 1 & \text{س}+2 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= (\text{س}+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \text{س}+1 & -2 \\ \cdot & -1 & \text{س}-1 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ + س ص٣)

$= (\text{س}+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & 1 & \text{س}^2-\text{س}-2 \\ \cdot & -1 & \text{س}-1 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٣ + ص٢)

$= (\text{س}+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & 1 & \text{س}^2-\text{س}-2 \\ \cdot & \cdot & \text{س}^2-3 \end{vmatrix}$

$= (\text{س}+6)(\text{س}^2-3)$

⑤ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ب}-\text{د} & \text{ب}-\text{جـ} & \text{جـ} \\ \text{ب}-\text{د} & \text{جـ} & \text{ب}-\text{جـ} \\ -\text{د} & \text{ب}-\text{جـ} & \text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ + ع٢ + ع٣)

$= \begin{vmatrix} 2\text{ب}-\text{د} & \text{ب}-\text{جـ} & \text{جـ} \\ 2\text{ب}-\text{د} & \text{جـ} & \text{ب}-\text{جـ} \\ 2\text{ب}-\text{د} & \text{ب}-\text{جـ} & \text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$

بأخذ عامل مشترك (٢ ب − د) من ع١

$= (2\text{ب}-\text{د}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}-\text{جـ} & \text{جـ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{ب}-\text{جـ} \\ 1 & \text{ب}-\text{جـ} & \text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= (2\text{ب}-\text{د}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}-\text{جـ} & \text{جـ} \\ \cdot & 2\text{جـ}-\text{ب} & \text{ب}-2\text{جـ} \\ \cdot & \cdot & \text{ب} \end{vmatrix}$

$= \text{ب}(2\text{ب}-\text{د})(2\text{جـ}-\text{ب})$

⑥ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{أ+ب} \\ \text{ب} & \text{أ+ب} & \text{أ} \\ \text{أ+ب} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_1 + ع_2 + ع_3$)

$= \begin{vmatrix} \text{٢ (أ + ب)} & \text{ب} & \text{أ+ب} \\ \text{٢ (أ + ب)} & \text{أ+ب} & \text{أ} \\ \text{٢ (أ + ب)} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

بأخذ ٢ (أ + ب) عامل مشترك من $ع_1$

$= ٢ (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{أ+ب} \\ ١ & \text{أ+ب} & \text{أ} \\ ١ & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ثم ($ص_3 - ص_1$)

$= ٢ (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{أ+ب} \\ ٠ & \text{أ} & \text{-ب} \\ ٠ & \text{أ-ب} & \text{-أ} \end{vmatrix}$

تبديل $ع_2$ مع $ع_3$

$= -٢ (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ ٠ & \text{-ب} & \text{أ} \\ ٠ & \text{-أ} & \text{أ-ب} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_3 - \frac{أ}{ب} ص_2$)

$= -٢ (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ ٠ & \text{-ب} & \text{أ} \\ ٠ & ٠ & \text{أ - ب} - \frac{\text{أ}^2}{\text{ب}} \end{vmatrix}$

$= -٢ (أ + ب) (- أ ب + ب^2 + أ^2)$

$= -٢ (أ^3 + ب^3)$

⑦ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{٢أ - ﺟ} & \text{أ - ٢ب} & \text{٢ب} \\ \text{٢أ - ﺟ} & \text{٢ب} & \text{٢أ - ٢ب} \\ \text{- ﺟ} & \text{٢أ - ٢ب} & \text{٢أ + ٢ب} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_1 + ع_3$)

$= \begin{vmatrix} \text{٢أ - ﺟ} & \text{أ - ٢ب} & \text{أ} \\ \text{٢أ - ﺟ} & \text{٢ب} & \text{٢أ} \\ \text{- ﺟ} & \text{٢أ - ٢ب} & \text{٤أ} \end{vmatrix}$

(أ مشترك من $ع_3$)

$= أ \begin{vmatrix} \text{٢أ - ﺟ} & \text{أ - ٢ب} & ١ \\ \text{٢أ - ﺟ} & \text{٢ب} & ٢ \\ \text{- ﺟ} & \text{٢أ - ٢ب} & ٤ \end{vmatrix}$

(بإجراء $ص_2 - ٢ ص_1$ ، $ص_3 - ٤ ص_1$)

$= أ \begin{vmatrix} \text{٢أ - ﺟ} & \text{أ - ٢ب} & ١ \\ \text{-٢أ + ﺟ} & \text{٦ب - ٢أ} & ٠ \\ \text{٣ﺟ - ٨أ} & \text{-٦أ + ٦ب} & ٠ \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_3 - ص_2$)

$= أ \begin{vmatrix} \text{٢أ - ﺟ} & \text{أ - ٢ب} & ١ \\ \text{-٢أ + ﺟ} & \text{٦ب - ٢أ} & ٠ \\ \text{-٦أ + ٢ﺟ} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$= - أ (-٦أ + ٢ﺟ) (٦ب - ٢أ)$

$= ٤أ (٣أ - ﺟ) (٣ب - أ)$

⑧ الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ﺟ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{ﺟ}^2 \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_2 - ع_1$ ، $ع_3 - ع_1$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & \text{ب - أ} & \text{ﺟ - أ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 - \text{أ}^2 & \text{ﺟ}^2 - \text{أ}^2 \end{vmatrix}$

(ب - أ) عامل مشترك من $ع_2$

، (ﺟ - أ) عامل مشترك من $ع_3$

$= (ب - أ) (ﺟ - أ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & ١ & ١ \\ \text{أ}^2 & \text{ب + أ} & \text{ﺟ + أ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_3 - ع_2$)

$= (ب - أ) (ﺟ - أ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & ١ & ٠ \\ \text{أ}^2 & \text{ب + أ} & \text{ﺟ - ب} \end{vmatrix}$

$= (ب - أ) (ﺟ - أ) (ﺟ - ب)$

⑨ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$ بإجراء ($ع_1 + ع_2 + ع_3$)

ثم أخذ (٢ س + ص) مشترك من $ع_1$

$= (٢ س + ص) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ١ & \text{ص} & \text{س} \\ ١ & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$)

$= (٢ س + ص) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ص - س} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ص - س} \end{vmatrix}$

$= (٢ س + ص) (ص - س)^2$

$= (٢ س + ص) (س - ص)^2$

⑩ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ - ﺟ} & \text{٢أ} \\ \text{ب} & \text{أ - ﺟ} & \text{٢ب} \\ \text{ﺟ} & \text{أ} & \text{ب + ﺟ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_3 - ٢ ع_1$)

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ - ﺟ} & ٠ \\ \text{ب} & \text{أ - ﺟ} & ٠ \\ \text{ﺟ} & \text{أ} & \text{ب - ﺟ} \end{vmatrix}$ بإجراء ($ص_1 - ص_2$)

$= \begin{vmatrix} \text{أ - ب} & ٠ & ٠ \\ \text{ب} & \text{أ - ﺟ} & ٠ \\ \text{ﺟ} & \text{أ} & \text{ب - ﺟ} \end{vmatrix}$

$= (أ - ب) (أ - ﺟ) (ب - ﺟ)$

⑪ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ﺟ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ﺟ} \\ \text{ب} & \text{ﺟ} & \text{أ} \end{vmatrix}$

ثم أخذ (أ + ب + ﺟ) من $ع_1$

$= (أ + ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{ﺟ} \\ ١ & \text{أ} & \text{ﺟ} \\ ١ & \text{ﺟ} & \text{أ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ، ($ص_3 - ص_1$)

$= (أ + ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{ﺟ} \\ ٠ & \text{أ - ب} & ٠ \\ ٠ & \text{ﺟ - ب} & \text{أ - ﺟ} \end{vmatrix}$

(تبديل $ص_2$ مع $ص_3$)

$= - (أ + ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{ﺟ} \\ ٠ & \text{ﺟ - ب} & \text{أ - ﺟ} \\ ٠ & \text{أ - ب} & ٠ \end{vmatrix}$

(تبديل $ع_2$ مع $ع_3$)

$= (أ + ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & \text{ﺟ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{أ - ﺟ} & \text{ﺟ - ب} \\ ٠ & ٠ & \text{أ - ب} \end{vmatrix}$

$= (أ + ب + ﺟ) (أ - ﺟ) (أ - ب)$

⑫ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س + أ} & \text{س + أ} & \text{٢أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & \text{أ - س} & \text{س - أ} \end{vmatrix}$

بإجراء $ص_1 - ص_2$ ، $ص_3 + ص_2$

$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$ بإجراء $ع_1 + ع_2 + ع_3$

$= \begin{vmatrix} \text{س + ٢أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{س + ٢أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س + ٢أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

بأخذ (س + ٢أ) عامل مشترك

$= (س + ٢أ) (س - أ)^2$

⑬ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ + س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ب + س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ﺟ + س} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ب + س} & \text{س} \\ ٠ & \text{س} & \text{ﺟ + س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ب + س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ﺟ + س} \end{vmatrix}$

(بإجراء $ص_3 - ص_2$ على المحدد الأول)

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ب} & \text{- ﺟ} \\ ٠ & \text{س} & \text{ﺟ + س} \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ١ & \text{ب + س} & \text{س} \\ ١ & \text{س} & \text{ﺟ + س} \end{vmatrix}$

[بإجراء ($ص_3 - (\frac{س}{ب}) ص_2$) على المحدد الأول

، بإجراء ($ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$) على المحدد الثاني]

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ب} & \text{- ﺟ} \\ ٠ & ٠ & (\text{ﺟ + س} + \frac{\text{س ﺟ}}{\text{ب}}) \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ب} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ﺟ} \end{vmatrix}$

⑭ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ - ب - ﺟ} & \text{٢أ} & \text{٢أ} \\ \text{٢ب} & \text{ب - ﺟ - أ} & \text{٢ب} \\ \text{٢ﺟ} & \text{٢ﺟ} & \text{ﺟ - أ - ب} \end{vmatrix}$

بإجراء $ص_1 + ص_2 + ص_3$ = (أ + ب + ﺟ)

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{٢ب} & \text{ب - ﺟ - أ} & \text{٢ب} \\ \text{٢ﺟ} & \text{٢ﺟ} & \text{ﺟ - أ - ب} \end{vmatrix}$

(بإجراء $ع_2 - ع_1$ ، $ع_3 - ع_1$)

$= (أ + ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{٢ب} & \text{- ب - ﺟ - أ} & ٠ \\ \text{٢ﺟ} & ٠ & \text{- أ - ب - ﺟ} \end{vmatrix}$

$= (أ + ب + ﺟ)^3$

⑮ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أل} & \text{أم} & \text{أن} \\ \text{أم} & \text{ب م} & \text{ب ن} \\ \text{أن} & \text{ب ن} & \text{ﺟ ن} \end{vmatrix}$

بأخذ (أ مشترك من $ع_1$) ، (ن مشترك من $ع_3$)

$= أن \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{أم} & \text{أ} \\ \text{م} & \text{ب م} & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ب ن} & \text{ﺟ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_2 - م ع_3$)

$= أن \begin{vmatrix} \text{ل} & ٠ & \text{أ} \\ \text{م} & ٠ & \text{ب} \\ \text{ن} & \text{ب ن - م ﺟ} & \text{ﺟ} \end{vmatrix}$

تبديل $ع_2$ مع $ع_3$

$= - أن \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{أ} & ٠ \\ \text{م} & \text{ب} & ٠ \\ \text{ن} & \text{ﺟ} & \text{ب ن - م ﺟ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 - \frac{م}{ل} ص_1$)

$= - أن \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{أ} & ٠ \\ ٠ & \text{ب} - \frac{\text{أم}}{\text{ل}} & ٠ \\ \text{ن} & \text{ﺟ} & \text{ب ن - م ﺟ} \end{vmatrix}$

$= - أن (ل) (ب - \frac{أم}{ل}) (ب ن - م ﺟ)$

$= أن (ب ل - أ م) (م ﺟ - ب ن)$

⑯ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ + ب + ﺟ} & \text{- ﺟ} & \text{- ب} \\ \text{- ﺟ} & \text{أ + ب + ﺟ} & \text{- أ} \\ \text{- ب} & \text{- أ} & \text{أ + ب + ﺟ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_1 + ص_2$ ، $ص_2 + ص_3$)

$= \begin{vmatrix} \text{أ + ﺟ} & \text{- أ - ﺟ} & \text{أ + ﺟ} \\ \text{- ب - ﺟ} & \text{ب + ﺟ} & \text{ب + ﺟ} \\ \text{- ب} & \text{- أ} & \text{أ + ب + ﺟ} \end{vmatrix}$

بأخذ (أ + ﺟ) مشترك من $ص_1$ ، (ب + ﺟ)

مشترك من $ص_2$

$= (أ + ﺟ) (ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & \text{-١} & ١ \\ \text{-١} & ١ & ١ \\ \text{- ب} & \text{- أ} & \text{أ + ب + ﺟ} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_2 + ع_1$ ، $ع_3 - ع_1$)

$= (أ + ﺟ) (ب + ﺟ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{-١} & ٠ & ٢ \\ \text{- ب} & \text{- أ - ب} & \text{أ + ﺟ + ٢ب} \end{vmatrix}$

(تبديل $ع_2$ مع $ع_3$) = - (أ + ﺟ) (ب + ﺟ)

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{-١} & ٢ & ٠ \\ \text{- ب} & \text{أ + ﺟ + ٢ب} & \text{- أ - ب} \end{vmatrix}$

$= - (أ + ﺟ) (ب + ﺟ) \times ٢ (- أ - ب)$

$= ٢ (أ + ﺟ) (ب + ﺟ) (أ + ب)$

⑰ الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س + ص + ٢} & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{٢ س + ص + ١} & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س + ٢ ص + ١} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_1 + ع_2 + ع_3$)

ثم أخذ ٢ (س + ص + ١) مشترك من $ع_1$

$= ٢ (س + ص + ١) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{٢ س + ص + ١} & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س + ٢ ص + ١} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ، ($ص_3 - ص_1$)

$= ٢ (س + ص + ١) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & \text{س + ص + ١} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س + ص + ١} \end{vmatrix}$

$= ٢ (س + ص + ١)^3$

⑱ الأيمن =

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ \text{-٢ س + ٢ س}^2 & \text{١ + ٢ س}^2 & \text{٢ س}^2 \\ \text{-٣ + ٢ س}^2 & \text{٣ س}^2 & \text{١ + ٢ س}^2 \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_2 - ع_1$ ، $ع_3 - س ع_1$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{-٢ س + ٢ س}^2 & \text{١ + ٢ س} & \text{٢ س}^2 \\ \text{-٣ + ٢ س}^2 & \text{س}^2 \text{ + ٣} & \text{١ + ٣ س + س}^2 \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_3 - س ع_2$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{-٢ س + ٢ س}^2 & \text{١ + ٢ س} & \text{- س} \\ \text{-٣ + ٢ س}^2 & \text{س}^2 \text{ + ٣} & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء ($ص_2 + س ص_3$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdots & 1+5\text{س}+\text{س}^2 & \cdot \\ 1 & \text{س}^2+2 & \end{vmatrix}(-5\text{س}+2\text{س}^2+2\text{س}^3)(1+5\text{س}+\text{س}^2)$$

$$= 1 + 5\text{س} + \text{س}^2$$

(١٩) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \text{ب}^2 & \text{حـ}^2+\text{أ}^2 & \text{حـ أ} \\ \text{حـ}^2 & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_1 + ع_2$) ، أخذ ($\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2$) مشترك من $ع_1$

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ 1 & \text{حـ}^2+\text{أ}^2 & \text{حـ أ} \\ 1 & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ، ($ص_3 - ص_1$)

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \text{أ}^2-\text{ب}^2 & \text{حـ}(\text{أ}-\text{ب}) \\ \cdot & \text{أ}^2-\text{حـ}^2 & \text{ب}(\text{أ}-\text{حـ}) \end{vmatrix}$$

($\text{أ} - \text{ب}$) مشترك من $ص_2$

، ($\text{أ} - \text{حـ}$) مشترك من $ص_3$

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \text{أ}+\text{ب} & \text{حـ} \\ \cdot & \text{أ}+\text{حـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$ بإجراء ($ص_3 - ص_2$)

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \text{حـ}-\text{ب} & \text{ب}-\text{حـ} \\ \cdot & \text{أ}+\text{حـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ})(\text{ب}-\text{حـ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \text{أ}+\text{حـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_3 - (\text{أ}+\text{حـ})ص_2$)

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ})(\text{ب}-\text{حـ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ})(\text{أ}-\text{ب})$$

$$(\text{أ}-\text{حـ})(\text{ب}-\text{حـ})$$

(٢٠) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 \\ 1 & 1+2\text{حـ}^2 & 2\text{حـ}^2 \\ \text{حـ} & 2\text{حـ}^2 & 1+2\text{حـ}^2 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_3 - \text{حـ}\,ص_1$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 \\ 1 & 1+2\text{حـ}^2 & 2\text{حـ}^2 \\ \cdot & -\text{حـ} & 1 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 \\ \cdot & 1+2\text{حـ} & 2\text{حـ} \\ \cdot & -\text{حـ} & 1 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ع_2 + \text{حـ}\,ع_3$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\text{حـ}+2\text{حـ}^2-2\text{حـ}^3 & -2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 \\ \cdot & 1+2\text{حـ}+2\text{حـ}^2 & 2\text{حـ} \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (1 + 2\text{حـ} + 2\text{حـ}^2) \times 1$$

$$= 1 + 2\text{حـ} + 2\text{حـ}^2$$

(٢١) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^3 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^3 \end{vmatrix}$

(بأخذ عوامل مشتركة س ، ص ، ع من $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ على الترتيب)

$$= \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$)

$$= \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ \cdot & \text{ع}-\text{س} & \text{ع}^2-\text{س}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س ص ع})(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ \cdot & 1 & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_3 - ص_2$)

$$= (\text{س ص ع})(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ \cdot & \cdot & \text{ع}-\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ص ع}(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})$$

$$= \text{س ص ع}(\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

(٢٢) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3+1 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^3+1 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^3+1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^3 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & 1 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & 1 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \text{س}^2 & \text{س} \\ 1 & \text{ص}^2 & \text{ص} \\ 1 & \text{ع}^2 & \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س ص ع} + 1) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

[بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ، ($ص_3 - ص_1$)]

$$= (\text{س ص ع} + 1) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ \cdot & \text{ع}-\text{س} & \text{ع}^2-\text{س}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س ص ع} + 1)(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ \cdot & 1 & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix}$$ بإجراء ($ص_3 - ص_2$)

$$= (\text{س ص ع} + 1)(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ \cdot & \cdot & \text{ع}-\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س ص ع} + 1)(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})$$

$$= (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})(\text{س ص ع}+1)$$

(٢٣) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{ص}+2 & 2 & \text{ص} \\ 2 & \text{س}+2 & \text{س} \end{vmatrix}$

بإجراء ($ع_3 - ع_1 - ع_2$)

$$= \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \cdot \\ \text{ص}+2 & 2 & -4 \\ 2 & \text{س}+2 & -4 \end{vmatrix}$$ بإجراء ($ص_3 - ص_2$)

[illegible]

(٢٤) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{ص} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص} & 1 & \cdot \\ \text{ع}^2 & \cdot & 1 \end{vmatrix}$ تبديل $ع_1$ مع $ع_3$

$$= -\begin{vmatrix} -\text{ع} & -\text{ص} & \text{س} \\ \cdot & 1 & \text{ص} \\ 1 & \cdot & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$ تبديل $ص_1$ مع $ص_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \text{ع}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص} \\ -\text{ع} & -\text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$$ بإجراء ($ص_3 + \text{ع}\,ص_1$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \text{ع}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص} \\ \cdot & -\text{ص} & \text{س}+\text{ع}^3 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_3 + \text{ص}\,ص_2$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \text{ع}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ص} \\ \cdot & \cdot & \text{س}+\text{ص}^2+\text{ع}^3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3$$

(٢٥) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{أ ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \text{أ حـ} & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{أ ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \text{أ حـ} & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \cdot & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

مشترك أ من $ص_1$ ، $ع_1$ في المحدد الأول

$$+ \begin{vmatrix} \cdot & \text{ب}^2 & \text{أ ب} \\ \cdot & \text{ب}^2 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \text{أ حـ} \\ \cdot & 1 & \text{ب حـ} \\ \cdot & \cdot & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_2 - \text{ب}\,ص_1$ ، $ص_3 - \text{حـ}\,ص_1$)

في المحدد الأول ، ب مشترك من كل $ص_2$ ، $ع_2$

في المحدد الثاني

$$= \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{حـ} \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ حـ} \\ \cdot & 1 & \text{حـ} \\ \cdot & \text{حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + (\text{حـ}^2 + 1)$$

بإجراء ($ص_3 - \text{حـ}\,ص_2$) في المحدد الثاني

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ حـ} \\ \cdot & 1 & \text{حـ} \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} + (\text{حـ}^2 + 1)$$

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + 1$$

(٢٦) بأخذ أ عامل مشترك من $ع_1$ ، ب عامل مشترك من $ع_2$ ، حـ عامل مشترك من $ع_3$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{أ ب حـ} \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{أ}}+1 & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \frac{1}{\text{ب}}+1 & \frac{1}{\text{حـ}} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}}+1 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ع_1 + ع_2 + ع_3$)

بأخذ ($\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{حـ}} + 1$) عامل مشترك

$$= \text{أ ب حـ}\left(\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{حـ}} + 1\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}} \\ 1 & \frac{1}{\text{ب}}+1 & \frac{1}{\text{حـ}} \\ 1 & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}}+1 \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ص_2 - ص_1$) ، ($ص_3 - ص_1$)

$$= \text{أ ب حـ}\left(\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{حـ}} + 1\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}} \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ ب حـ}\left(\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{حـ}} + 1\right) \times 1$$

$$= \text{أ ب حـ}\left(\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{حـ}} + 1\right)$$

١٧

(١) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص} & 2\text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص}+\text{ع} & 2\text{ع} & \text{س} \\ \text{ع}+\text{س} & 2\text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$

بأخذ (٢ مشترك من $ع_2$)

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص}+\text{ع} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع}+\text{س} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ع_1 - ع_2$)

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

[illegible]

بإجراء ($ع_1 + ع_2 + ع_3$)

$$= \begin{vmatrix} 2\text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ 2\text{م} & \text{ن}+\text{ل} & \text{ل}+\text{م} \\ 2\text{ن} & \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ن} \end{vmatrix}$$

بأخذ (٢ مشترك من $ع_1$)

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ \text{م} & \text{ن}+\text{ل} & \text{ل}+\text{م} \\ \text{ن} & \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ن} \end{vmatrix}$$

بإجراء ($ع_3 - ع_1$)

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن} \\ \text{م} & \text{ن}+\text{ل} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{ل}+\text{م} & \text{م} \end{vmatrix}$$ بإجراء ($ع_2 - ع_3$)

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{ل} & \text{م} \end{vmatrix} = \text{الأيسر}.$$

(٢) الطرف الأيسر $= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^3 & \text{ب}^3 & \text{حـ}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

بأخذ (أ ، ب ، حـ مشترك من $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ على الترتيب)

$$= \text{أ ب حـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \frac{1}{\text{أ}} & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{حـ}} \end{vmatrix}$$

بضرب أ ب حـ × $ص_3$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{ب حـ} & \text{أ حـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيمن}$$

④ الأيمن =

بأخذ (سـحـ من ع١ ، ٢حـ من ع٢ ، ٢ب من ع٣)

= سـحـ × ٢حـ × ٢ب

٢ × ص٢ ، ب × ص٢ ، حـ × ص٣

= ٢بـحـ = الأيسر

⑤ الأيمن =

بأخذ (سـحـ من ع١ ، ٢حـ من ع٢ ، ٢ب من ع٣)

بضرب (حـ × ص١ ، ٢حـ × ص٢ ، ٢ب × ص٣)

= الأيسر.

⑥ الأيمن =

بإجراء (ع٢ ، ع٣)

= ٢

بإجراء (ع٢ − ع٣)

= ٢

= − ٢ س = الأيسر.

⑦ الأيمن =

بإجراء (ع٢ − س ع٣)

باتخاذ (١ − س٢) مشترك من ع٢

= (١ − س٢)

بإجراء (ع٣ − س ع٢)

= (١ − س٢) = الأيسر.

⑧ الأيمن =

= ٢

بأخذ (٢ مشترك من ص٢)

= ٢

بإجراء (ص٣ − ص١)

= ٢

بإجراء (ص٣ − ص٢)

= ٢ = الأيسر.

⑨ الأيمن =

بإجراء (ص٢ + ص٣)

بأخذ (٢ + ب) مشترك من ص٢

= (٢ + ب)

(تبديل ع٢ ، ع٣)

= − (٢ + ب)

بضرب (حـ فى ص٣)

= − (٢ + ب)

تبديل (ع٢ ، ع٣)

= (٢ + ب) = الأيسر.

١٨

= ٠

= ٠

= ٠

= ٠

(ص١ + ٤ ص٢) ، (ص٣ + ص٢)

= ١٠

١٠) [س (٢ + س) − ٢ (٣ + ٤ س)] = ١٠

س + س٢ − ٦ − ٨ س = ١٠

س٢ − ٦ س − ١٦ = ٠

(س − ٨) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٨ أ، س = −٢

(ص٢ − س ص١)

(ص٣ − ص٢) فى المحدد الأول

= س٢ + س

[(س + ١) (س − ١) − (−١ + س) × (س − ١)]

∴ س = −١

③ ∴

بإجراء (ع٢ + ع٣)

∴ = ٢ س + ١

∴ −١ ((٢ − س) × س − (س + ٢) × ١) = ٢ س + ١

∴ −٢ س + س٢ + س + ٢ − ٢ س − ١ = ٠

س٢ − ٣ س + ١ = ٠

$$\therefore س = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ (١)(١)}}{٢ (١)} = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

٢٠

الأيمن =

بإجراء (ع١ + ع٢ + ع٣)

، بأخذ (س + ٢ + ب) مشترك من ع١

= (س + ٢ + ب)

بإجراء (ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١)

= (س + ٢ + ب)

(تبديل ع٢ ، ع٣)

= − (س + ٢ + ب)

(تبديل ص٢ ، ص٣)

= (س + ٢ + ب) (ب − س) (ب − ٢) = الأيسر.

إذا إعتبرنا س = ٢ جا هـ ، ٢ = ١ ، ب = −١

فإن (٢ جا هـ + ١ + (−١)) (٢ جا هـ − (−١))

(٢ جا هـ − ١) = ٠

∴ ٢ جا هـ = ٠ ومنها جا هـ = ٠ ∴ هـ = ٠° ، ١٨٠°

أ، ٢ جا هـ + ١ = ٠ ومنها جا هـ = $-\frac{1}{2}$ (مرفوض)

أ، ٢ جا هـ − ١ = ٠ ومنها جا هـ = $\frac{1}{2}$

∴ هـ = ٣٠° ، ١٥٠°

∴ مجموعة الحل : {٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°}

٢١

① (د) ② (ب) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

إرشادات لحل رقم ٢١ :

① نفرض أن م =

∴ = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ م

② ∵ = −٤ × ١ − ١ × ١ = −٥

= −٤ ، ... ، = ٩

∴ النواتج تكون متتابعة حسابية عدد حدودها = ١٥ وحدها الأول = −٥ وحدها الأخير = ٩

∴ المجموع = $\frac{١٥}{٢}$ (−٥ + ٩) = ٣٠

③ فى كل محدد يتم عمل الإجراءات التالية على الترتيب (ص٢ − ص١) ثم (ع٢ − ع١)

= −٢

∴ النواتج كلها متساوية وقيمة كل منها = −٢ وعددهم = ٢٠١٩

∴ المجموع = −٢ × ٢٠١٩ = −٤٠٣٨

④ ∵ حـ ، ب هما جذرا المعادلة : س٢ − ١١ س + ٢٧ = ٠

∴ حـ ب = ٢٧

= لو٣ حـ + لو٣ ب = لو٣ (حـ ب) = لو٣ ٢٧ = ٣

⑤ ∵ د (س) =

= جا س جا ٢ س جا ٣ س

∴ نهـا د (س) / س٣

= نهـا (جا س / س) × (جا ٢ س / س) × (جا ٣ س / س) = ١ × ٢ × ٣ = ٦

⑥

(٢) المصفوفة تكون منفردة عندما Δ = ٠

$\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ٣ \\ ٤ & \text{س} + ٣ \end{vmatrix} = ٠$

∴ (س − ١) (س + ٣) − ١٢ = ٠

$\text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣ - ١٢ = ٠$

$\text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥ = ٠$

س = −٥ ، س = ٣

(٣) لتكون المصفوفة منفردة. ∴ Δ = ٠

$\begin{vmatrix} \text{س} + ٣ & ٢ \\ \text{س} + ٢ & \text{س} + ٢ \end{vmatrix} = ٠$

(س + ٣) (س + ٢) − ٢ (س + ٢) = ٠

(س + ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = −٢ ، س = −١

(٤) $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء (ع١ − ع٣)

$\begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ \text{س} - ١ & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$

−(س − ١) (−٤ − ٦) = ٠

س − ١ = ٠ ∴ س = ١

(٥) $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ \text{س} + ١ & \text{س} + ٢ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$

بإجراء (ع١ − ع٣)

[illegible]

(س − ١) × (−٤ − ٦) = ٠

(س − ١) = صفر ∴ س = ١

(٦) $\begin{vmatrix} \text{جا س} & \text{جتا س} & ٠ \\ ١ & \sqrt{٣} & ٠ \\ \text{طا س} & \text{قا س} & ١ \end{vmatrix} = ٠$

$\sqrt{٣}$ جا س − جتا س = ٠

∴ طا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ س = ٣٠° + ١٨٠° ن حيث ن ∈ ص

٣

(١) $\text{هـ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة هـ

= [illegible]

$= \begin{pmatrix} ٩ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٩ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$

(٢) $\text{ع} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ع

[illegible]

$= \begin{pmatrix} -٢ & ١٥ & -١٢ \\ -٢٥ & ٢٣ & -٩ \\ ١٧ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix}$

٤

(١) $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

$\text{ب ب}^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = ٣ I$

$\text{ب}^{مد}\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = ٣ I$

(٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب

$= \begin{pmatrix} ٧ & ١ & -٥ \\ ١٥ & ٢ & -١٠ \\ -٦ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٥ & -٦ \\ ١ & ٢ & -١ \\ -٥ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix}$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{vmatrix} = -١$

∴ $\text{ب ب}^{مد} = -١ I$ ، $\text{ب}^{مد}\text{ب} = -١ I$

(١) $\text{ب} = \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix}$ ∴ |ب| = ٢

$\text{ب}^{مد} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٥ & ٤ \end{pmatrix}$ [illegible]

∴ $\text{ب}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

∵ |ب| = صفر

∴ لا يوجد للمصفوفة ب معكوس ضربي.

(٣) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{قا } θ & ١ \\ ١ & \text{قا } θ \end{pmatrix}$

$|\text{ب}| = \text{قا}^2 θ - ١ = \text{ظا}^2 θ$

$\text{ب}^{مد} = \begin{pmatrix} \text{قا } θ & -١ \\ -١ & \text{قا } θ \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{-١} = \frac{١}{\text{ظا}^2 θ}\begin{pmatrix} \text{قا } θ & -١ \\ -١ & \text{قا } θ \end{pmatrix}$

$= \text{ظتا}^2 θ \begin{pmatrix} \text{قا } θ & -١ \\ -١ & \text{قا } θ \end{pmatrix}$

(٤) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{جا } θ & -\text{جتا } θ \\ \text{جتا } θ & \text{جا } θ \end{pmatrix}$

$|\text{ب}| = \text{جا}^2 θ + \text{جتا}^2 θ = ١$

$\text{ب}^{مد} = \begin{pmatrix} \text{جا } θ & \text{جتا } θ \\ -\text{جتا } θ & \text{جا } θ \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{-١} = \begin{pmatrix} \text{جا } θ & \text{جتا } θ \\ -\text{جتا } θ & \text{جا } θ \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ن & \frac{ن(ن-١)}{٢} \\ ١ & ن+١ & \frac{ن(ن+١)}{٢} \\ ١ & ن+٢ & \frac{(ن+١)(ن+٢)}{٢} \end{vmatrix}$

بتدوير المحدد

$= \begin{vmatrix} ١ & ن & \frac{ن^2-ن}{٢} \\ ١ & ن+١ & \frac{ن^2+ن}{٢} \\ ١ & ن+٢ & \frac{ن^2+٣ن+٢}{٢} \end{vmatrix}$

(ص٢ − ص١) ، (ص٣ − ص١)

$= \begin{vmatrix} ١ & ن & \frac{ن^2-ن}{٢} \\ ٠ & ١ & ن \\ ٠ & ٢ & ٢ن+١ \end{vmatrix}$ (ص٣ − ٢ ص٢)

$= \begin{vmatrix} ١ & ن & \frac{ن^2-ن}{٢} \\ ٠ & ١ & ن \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$

١٢

(١) الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ص} + \text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix}$

$= \text{ص} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ١ & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix} + \text{ع} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١) في المحدد الأول ، ص٣ − ص١ في المحدد الثاني

$= \text{ص} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} & \text{ص} - \text{س} \\ ٠ & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix} + \text{ع} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & \text{ع} - \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$

بإجراء ص٣ − ص٢ في كل من المحددين

$= \text{ص} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} & \text{ص} - \text{س} \\ ٠ & ٠ & ٢\text{س} \end{vmatrix} + \text{ع} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ع} + \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & -٢\text{س} & ٠ \end{vmatrix}$

تبديل ع٢ مع ع٣

= ص (١ × ع × ٢ س) − ع $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ ٠ & \text{ص} & \text{ع} + \text{س} \\ ٠ & ٠ & -٢\text{س} \end{vmatrix}$

= ٢ س ص ع − ع (ص × −٢ س)

= ٤ س ص ع

(٢) الأيمن = $\begin{vmatrix} \sqrt{١٣} + \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٥} & \sqrt{٥} \\ \sqrt{٢٦} + \sqrt{١٥} & ٥ & \sqrt{١٠} \\ \sqrt{٦٥} + ٣ & \sqrt{١٥} & ٥ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \sqrt{١٣} & ٢\sqrt{٥} & \sqrt{٥} \\ \sqrt{٢٦} & ٥ & \sqrt{١٠} \\ \sqrt{٦٥} & \sqrt{١٥} & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٥} & \sqrt{٥} \\ \sqrt{١٥} & ٥ & \sqrt{١٠} \\ ٣ & \sqrt{١٥} & ٥ \end{vmatrix}$

$= \sqrt{١٣} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ \sqrt{٢} & \sqrt{٥} & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٥} & \sqrt{٣} & \sqrt{٥} \end{vmatrix} + \sqrt{٣}\sqrt{٥}\sqrt{٥} \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ \sqrt{٥} & \sqrt{٥} & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٣} & \sqrt{٣} & \sqrt{٥} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ − ع٣)

$= \text{صفر} + ٥\sqrt{٣} \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & \sqrt{٥} & \sqrt{٢} \\ ٠ & \sqrt{٣} & \sqrt{٥} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٣ − $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$ ص٢)

$= ٥\sqrt{٣} \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & \sqrt{٥} & \sqrt{٢} \\ ٠ & ٠ & \sqrt{٥} - \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٥}} \end{vmatrix}$

$= ٥\sqrt{٣} \times -١ \times \sqrt{٥} \times \left(\sqrt{٥} - \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٥}}\right)$

$= ٥\sqrt{٣}\left(\sqrt{٦} - ٥\right)$ = الأيسر.

١٣

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٨ & ١١ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٤ \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٣ − ص١)

[illegible]

$= \begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ١ & ٧ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$ بإجراء ع١ + ع٢ + ع٣

$= \begin{vmatrix} ١٢ & ٤ & ٤ \\ ١٢ & ٧ & ٤ \\ ١٢ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$

بإجراء (ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١)

$= \begin{vmatrix} ١٢ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢ \times ٣ \times ٣ = ١٠٨$

إجابات تمارين 11

١

(١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ |أ| = ٢ × ٥ − ٣ × ٤ = −٢ ≠ ٠

∴ أ غير منفردة.

(٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ |ب| = ١ × ٣ − (−٢) × ٠ = ٣ ≠ ٠

∴ ب غير منفردة.

(٣) $\text{ع} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ |ع| = [illegible]

⑤ ب = $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ = ٢ I

ب$^{-1}$ = $\frac{1}{2}$ I

⑥ ب = $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

|ب| = ٦

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

ب^{مل} = $\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

ب$^{-1}$ = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

⑦ ب = $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

|ب| = ١

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ب^{مل} = $\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ب$^{-1}$ = $\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

⑧ ب = $\begin{pmatrix}5&0&0\\7&2&-2\\2&-3&3\end{pmatrix}$

∵ |ب| = صفر

∴ لا يوجد للمصفوفة معكوس ضربي

⑨ ب = $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&3&5\\1&4&0\end{pmatrix}$

|ب| = −٦٠

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix}-20&5&13\\12&-3&-9\\-14&2&10\end{pmatrix}$

ب^{مل} = $\begin{pmatrix}-20&12&-14\\5&-3&2\\13&-9&10\end{pmatrix}$

ب$^{-1}$ = $\frac{1}{-60}\begin{pmatrix}-20&12&-14\\5&-3&2\\13&-9&10\end{pmatrix}$

⑩ ب = $\begin{pmatrix}جتا\,هـ&-جا\,هـ&0\\جا\,هـ&جتا\,هـ&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

|ب| = جتا^2 هـ + جا^2 هـ = ١

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix}جتا\,هـ&-جا\,هـ&0\\جا\,هـ&جتا\,هـ&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ب^{مل} = $\begin{pmatrix}جتا\,هـ&جا\,هـ&0\\-جا\,هـ&جتا\,هـ&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ب$^{-1}$ = $\begin{pmatrix}جتا\,هـ&جا\,هـ&0\\-جا\,هـ&جتا\,هـ&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

٦

① (ب)	② (ا)	③ (ا)	④ (ب)
⑤ [illegible]	⑥ [illegible]	⑦ [illegible]	⑧ [illegible]
⑨ (ا)	⑩ (ا)	⑪ (ج)	⑫ (ج)
⑬ (ا)	⑭ (ا)	⑮ (ج)	⑯ (ا)
⑰ (ج)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ا)
㉑ (ج)	㉒ (د)	㉓ (د)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (ج)	㉗ (د)	㉘ (ب)
㉙ (ج)	㉚ (ب)	㉛ (ا)	㉜ (ب)

٧

ا + ب = $\begin{pmatrix}1&2\\2&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&7\\6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&9\\8&-9\end{pmatrix}$

|(ا + ب)| = −١١٧

(ا + ب)$^{-1}$ = $\frac{1}{-117}\begin{pmatrix}-9&-9\\-8&5\end{pmatrix}$ (أولاً)

ا − ب = $\begin{pmatrix}1&2\\2&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&7\\6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-5\\-4&-1\end{pmatrix}$

|ا − ب| = −١٧

(ا − ب)$^{-1}$ = $\frac{1}{-17}\begin{pmatrix}-1&5\\4&-3\end{pmatrix}$ (ثانياً)

٨

ج = $\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$ |ج| = ٢

٢ ج$^{-1}$ = ٢ × $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

اب = $\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

∴ ٢ ج$^{-1}$ = اب

٩

اب = [illegible]

(اب)$^{-1}$ = $\frac{1}{77}\begin{pmatrix}11&2\\0&7\end{pmatrix}$

|ا| = ٧ ، |ب| = ١١

ب$^{-1}$ = $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5&-1\\1&2\end{pmatrix}$

ا$^{-1}$ = $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$

ب$^{-1}$ ا$^{-1}$ = $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5&-1\\1&2\end{pmatrix}\times\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{77}\begin{pmatrix}5&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{77}\begin{pmatrix}11&2\\0&7\end{pmatrix}$

∴ (اب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ ا$^{-1}$

(١) ا$^{-1}$ = $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{-1}{7}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$

∵ |ا| = ٧ ∴ |ا$^{-1}$| = $\frac{1}{7}$

∴ (ا$^{-1}$)$^{-1}$ = ٧ ($\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$) = ا (٢)

١٠

① ا^2 = $\begin{pmatrix}4&?\\7&?\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&?\\7&?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65&112\\112&193\end{pmatrix}$

∵ |ا^2| = ١

∴ (ا^2)$^{-1}$ = [illegible]

(ا$^{-1}$)^2 = [illegible]

= $\begin{pmatrix}193&-112\\-112&65\end{pmatrix}$

∴ (ا^2)$^{-1}$ = (ا$^{-1}$)^2

② ا^2 = $\begin{pmatrix}-3&4&0\\2&-1&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&0\\2&-1&5\\1&0&-2\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}17&-16&20\\-3&9&-15\\-5&4&4\end{pmatrix}$

∴ |ا^2| = ٩٠٠

مرافقة (ا^2) = $\begin{pmatrix}96&87&33\\144&168&12\\60&195&105\end{pmatrix}$

(ا^2)^{مل} = $\begin{pmatrix}96&144&60\\87&168&195\\33&12&105\end{pmatrix}$

(ا^2)$^{-1}$ = $\frac{1}{900}\begin{pmatrix}96&144&60\\87&168&195\\33&12&105\end{pmatrix}$

|ا| = ٣٠

مرافقة ا = $\begin{pmatrix}2&9&1\\8&6&4\\20&15&-5\end{pmatrix}$

ا^{مل} = $\begin{pmatrix}2&8&20\\9&6&15\\1&4&-5\end{pmatrix}$

ا$^{-1}$ = [illegible]

(ا$^{-1}$)^2 = $\frac{1}{900}\begin{pmatrix}2&8&20\\9&6&15\\1&4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&8&20\\9&6&15\\1&4&-5\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{900}\begin{pmatrix}96&144&60\\87&168&195\\33&12&105\end{pmatrix}$

∴ (ا^2)$^{-1}$ = (ا$^{-1}$)^2

١١

ا = $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-1\\0&0&-3\end{pmatrix}$

(ا^{مد}) = $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\3&-1&-3\end{pmatrix}$

|ا^{مد}| = ٦

مرافقة (ا^{مد}) = $\begin{pmatrix}6&6&4\\0&-3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(ا^{مد})^{مل} = $\begin{pmatrix}6&0&0\\6&-3&0\\4&1&-2\end{pmatrix}$

(ا^{مد})$^{-1}$ = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\6&-3&0\\4&1&-2\end{pmatrix}$

|ا| = ٦

[illegible]

ا^{مل} = $\begin{pmatrix}6&6&4\\0&-3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

ا$^{-1}$ = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&6&4\\0&-3&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(ا$^{-1}$)^{مد} = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\6&-3&0\\4&1&-2\end{pmatrix}$

∴ (ا^{مد})$^{-1}$ = (ا$^{-1}$)^{مد}

١٢

اب ج = $\left[\begin{pmatrix}4&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}16&2\\20&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-10\\3&-11\end{pmatrix}$

|اب ج| = −٢٢ − (−٣٠) = ٨

(اب ج)$^{-1}$ = $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-11&10\\-3&2\end{pmatrix}$

|ج| = ١ ، |ب| = ٤ ، |ا| = ٢

ج$^{-1}$ = $\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ب$^{-1}$ = $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

ا$^{-1}$ = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-2\\-5&4\end{pmatrix}$

ج$^{-1}$ ب$^{-1}$ ا$^{-1}$ = [illegible]

= $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&-2\\-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-11&10\\-3&2\end{pmatrix}$

∴ (اب ج)$^{-1}$ = ج$^{-1}$ ب$^{-1}$ ا$^{-1}$

١٣

ب = ا$^{-1}$ ا ب

= $\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}$

∴ |ب| = −١

ب$^{-1}$ = $\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-3\end{pmatrix}$

١٤

∵ (اب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ ا$^{-1}$

∴ ب$^{-1}$ = ب$^{-1}$ ا$^{-1}$ ا = $\begin{pmatrix}2&3\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}6&-4\\7&-4\end{pmatrix}$

∵ |ب$^{-1}$| = ٤

ب = (ب$^{-1}$)$^{-1}$ = $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&4\\-7&6\end{pmatrix}$

١٥

$أ^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 14 \\ 70 & 36 \end{pmatrix}$

$-7أ = -7\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -14 \\ -70 & -28 \end{pmatrix}$

الطرف الأيمن $= أ^2 - 7أ - 8I$

$= \begin{pmatrix} 29 & 14 \\ 70 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & -14 \\ -70 & -28 \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$\because أ^2 - 7أ - 8I = O$

$\therefore أ(أ - 7I) = 8I$

$أ \times \frac{1}{8}(أ - 7I) = I$

$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{8}(أ - 7I)$

$= \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\right]$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

١٧

$أ^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$-4أ = -4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$

$ب = \begin{pmatrix} ١٦ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{pmatrix}$

$ب^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -١٦ & ٩ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

∵ أ س ب = I

بضرب كل من الطرفين من اليمين × $أ^{-١}$

ومن اليسار × $ب^{-١}$

$أ^{-١} أ س ب ب^{-١} = أ^{-١} I ب^{-١}$

$I × س × I = أ^{-١} ب^{-١}$

$س = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix} × \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -١٦ & ٩ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$س = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٣٤ & ١٩ \\ ٨٦ & -٤٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٧ & \frac{١٩}{٢} \\ ٤٣ & -٢٤ \end{pmatrix}$

٢٨

$(ب + ج) = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$

$(ب + ج)^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$

$أ(ب + ج)^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ $(ب + ج) أ^{-١} = [أ (ب + ج)^{-١}]^{-١}$

$= \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

٢٩

$ب^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $ب^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$ب^{-١} أ ب = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ٨ & ٨ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ٠ & ٢٤ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٨ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

وهي مصفوفة قطرية.

∵ $ب^{-١} أ^{٣} ب = ب^{-١} أ ب ب^{-١} أ ب ب^{-١} أ ب$

$= \begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}^{٣} = \begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٦٤ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥١٢ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

إجابات تمارين 12

١

① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (ب)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (أ) ⑫ (ب)
⑬ (أ)

٢

① $\begin{pmatrix} ٣ & -٧ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٩ & -٢ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ -٢ \\ ٩ \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

٣

① غير متجانسة. ② غير متجانسة.
③ غير متجانسة. ④ متجانسة.
⑤ غير متجانسة.

٤

① على النظم ١ × ٣ ، غير صفرية ∴ مرتبتها = ١

② على النظم ٣ × ١ ، غير صفرية ∴ مرتبتها = ١

③ على النظم ١ × ٣ ، صفرية

∴ مرتبتها = صفر

④ على النظم ٢ × ١ ، غير صفرية ∴ مرتبتها = ١

⑤ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ مرتبتها = ١

⑥ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية ، $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ مرتبتها = ١

⑦ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ = -٦ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑧ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑨ على النظم ٢ × ٣ ، غير صفرية

، قيمة كل محدداتها من الدرجة الثانية = صفر

∴ مرتبتها = ١

⑩ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية ، $\begin{vmatrix} ٦ & -٢ \\ ٩ & ٣ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑪ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية

، $\begin{vmatrix} ماهـ & مناهـ \\ -مناهـ & ماهـ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑫ على النظم ٣ × ٣ ، غير صفرية

، $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٣

⑬ على النظم ٣ × ٣ ، غير صفرية

، $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix}$ = صفر ولكن $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑭ مصفوفة وحدة على النظم ٣ × ٣

∴ مرتبتها = ٣

⑮ على النظم ٣ × ٣ ، غير صفرية

، $\begin{vmatrix} ٠ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & -٢ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} ٠ & -٣ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑯ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ... على النظم ٣ × ١ ، غير صفرية ∴ مرتبتها = ١

⑦ $\begin{pmatrix} ... \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

∴ كل محدداتها من الدرجة الثانية = ٠

∴ مرتبتها = ١

② $\begin{pmatrix} ١ & -٣ & ٥ \\ -١ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

∵ $\begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

③ $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

∵ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

④ $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٤ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣

∵ $\begin{vmatrix} ٣ & -٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٤ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٣

⑤ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = صفر

ولكن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٢

⑥ $\begin{pmatrix} ... \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٤

∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ١ & ٣ \\ -١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٣

⑦ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ & ٩ \\ ٢ & -٣ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ & -٣ & -٣ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٤

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$ ≠ صفر

∴ مرتبتها = ٣

٦

∵ أ على النظم ٣ × ٣ ، ∵ ر (أ) = ٢

∴ |أ| = صفر ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ٢ (-٤) -١ (-ك - ٢) + ٣ (٤ ك) = ٠

∴ ك = $\frac{٦}{١٣}$

٧

∵ أ على النظم ٣ × ٣ ∵ ر (أ) = ٣

∴ |أ| ≠ صفر بفرض $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٠ & ك & ٢ \\ ٣ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ -١ (٤ ك - ٢) + ٣ (٦ - ك) = ٠

∴ ك = $\frac{٢٠}{٧}$

∴ لكي تكون ر (أ) = ٣

فإن قيمة : ك ∈ ح - $\{\frac{٢٠}{٧}\}$

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ك & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ...

|أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ك & -٢ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix}$

= ١ (٢ ك - ٢) -٢ (٤ + ٦) -١ (-٢ - ٣ ك)

= ٥ (ك - ٤)

|أ| = ٠ عندما ك = ٤

تكون عندما ر (أ) = ٢ لأن $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$ ≠ ٠

عندما تكون قيمة : ك ≠ ٤ فإن : |أ| ≠ صفر

∴ ر (أ) = ٣

٩

أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ك & ٤ & ١٠ \\ ١ & ٧ & ١٧ \end{pmatrix}$

|أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ك & ٤ & ١٠ \\ ١ & ٧ & ١٧ \end{vmatrix}$

= ٣ (-٢) -١ (١٧ ك - ١٠) + ١ (٧ ك - ٤)

= - ١٠ ك

في حالة |أ| = ٠ ∴ ك = ٠

يجعل ر (أ) < ٣ ∵ $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ ≠ ٠

∴ ر (أ) = ٢ عند ك = ٠

١٠

① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)
⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (د)
⑪ (د)

١١

① $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

بفرض أن أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = ١ ≠ ٠

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ -١٢ \end{pmatrix}$

∴ س = ٨ ، ص = -١٢

② $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$

بفرض أن : ج = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ |ج| = ٧ ≠ ٠

∴ $ج^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ أ = ٢ ، ب = ١

③ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$

بفرض أن : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

، |أ| = ٩ ≠ ٠

$أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٠ \\ -١ & -٤ & ٣ \\ ٧ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{٩} \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٠ \\ -١ & -٤ & ٣ \\ ٧ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & -4 & -1\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = −١ ، ع = ٢

④ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}$

بفرض أن أ = $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

∴ |أ| = ٦ ≠ ٠

$\text{أ}^{مد} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

١٢

① س + ص = ٢ ، ٢ س + ٣ ص = ٥

∴ المعادلة المصفوفية هي

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{array}\right)$

∴ ر (أ) = ٢ ، ر (أ°) = ٢

∵ ر (أ) = ر (أ°) = عدد المجاهيل

∴ يوجد حل وحيد.

لإيجاد الحل نوجد $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ١

② ٥ س − ص = −١١ ، ٣ ص − س = ٥

∴ المعادلة المصفوفية هي

$\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}5 & -1 & -11\\ -1 & 3 & 5\end{array}\right)$

∴ ر (أ) = ٢ ، ر (أ°) = ٢

∵ ر (أ) = ر (أ°) = عدد المجاهيل.

∴ يوجد حل وحيد. لإيجاد الحل نوجد أ^{-1}

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

∴ س = −٢ ، ص = ١

③ ٧ س − ٤ ص = ٩ ، ٤ ص − ٧ س = ١٢

المعادلة المصفوفية هي

$\begin{pmatrix}7 & -4\\ -7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ ، أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}7 & -4 & 9\\ -7 & 4 & 12\end{array}\right)$

∴ ر (أ) = ١ ، ر (أ°) = ٢

∵ ر (أ) ≠ ر (أ°)

∴ المعادلات ليس لها حل.

④ ص = س − ٥ ، س = ص + ٩

ومنها س − ص = ٥ ، س − ص = ٩

∴ المعادلة المصفوفية هي :

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ، أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 9\end{array}\right)$

∴ ر (أ) = ١ ، ر (أ°) = ٢

∴ ر (أ) ≠ ر (أ°)

∴ المعادلات ليس لها حل.

⑤ ص = ٢ س − ٣ ، ٤ س − ٢ ص = ٦

∴ ٢ س − ص = ٣ ، ٤ س − ٢ ص = ٦

المعادلة المصفوفية $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ ، أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 6\end{array}\right)$

∴ ر (أ) = ١ ، ر (أ°) = ١

ر (أ) = ر (أ°) < عدد المجاهيل.

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول على الصورة (ل ، ٢ ل − ٣)

١٣

① ك س + ٣ ص = ٦ ، س + ص = ٢

المعادلة المصفوفية هي :

$\begin{pmatrix}ك & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix}ك & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ، أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}ك & 3 & 6\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right)$

∴ لكى تكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول

فإن : ر (أ) = ١ ، ر (أ°) = ١

∴ |أ| = ٠ ∴ ك − ٣ = ٠

∴ ك = ٣

② ك س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + (٤ ك − ٥) ص = ٥

المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix}ك & 3\\ 2 & 4ك-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix}ك & 3\\ 2 & 4ك-5\end{pmatrix}$

أ° = $\left(\begin{array}{cc|c}ك & 3 & 5\\ 2 & 4ك-5 & 5\end{array}\right)$

لكى تكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول يجب أن تكون ر (أ) = ر (أ°) = ١

∴ $\begin{vmatrix}ك & 3\\ 2 & 4ك-5\end{vmatrix} = 0$

∴ ٤ $ك^2$ − ٥ ك − ٦ = ٠

فإن ك = ٢ أو ك = $-\frac{3}{4}$

عند ك = ٢ فإن ر (أ) = ر (أ°) = ١ < ٢

∴ يوجد عدد لا نهائى من الحلول عند ك = ٢

، عند ك = $-\frac{3}{4}$ فإن ر (أ) = ١ ، ر (أ°) = ٢

لأن $\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & 5\\ 2 & 5\end{vmatrix} \neq 0$

∴ لا يوجد حل على الإطلاق عند ك = $-\frac{3}{4}$

$\begin{pmatrix}ك & 1\\ ك & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

لكى تكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول يجب أن تكون ر (أ) = ر (أ°) = ١

ولكن ر (أ°) = ٢

∴ لا توجد قيمة لـ ك تجعل للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول

④ ٣ س + ٩ ص = ٢ (ك + ١)

، ٢ س + ٦ ص = ك + ٣

المعادلة المصفوفية

$\begin{pmatrix}3 & 9\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(ك+1)\\ ك+3\end{pmatrix}$

لكى تكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول يجب أن تكون ر (أ) = ر (أ°) = ١

∴ $\begin{vmatrix}3 & 2ك+2\\ 2 & ك+3\end{vmatrix} = 0$

٣ ك + ٩ − ٢ (٢ ك + ٢) = ٠

٣ ك + ٩ − ٤ ك − ٤ = ٠

− ك + ٥ = ٠ ∴ ك = ٥

١٤

① س + ٣ ص = ٠ ، ٤ س = ٩ ص

المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -9\end{pmatrix}$

∵ ر (أ) = ٢ = عدد المجاهيل

∴ لا يوجد إلا الحل الصفرى

المعادلة المصفوفية

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

∵ ر (أ) = ٢ = عدد المجاهيل.

∴ لا يوجد إلا الحل الصفرى.

③ ٢ س + ٣ ص = ٠ ، ٦ ص + ٤ س = ٠

المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

∴ ر (أ) = ١

∴ يوجد عدد لا نهائى من الحلول من بينهم الحل الصفرى.

١٥

① ٢ س + ٧ ص + ٣ ع = ٠

٣ س + ص − ٢ ع = ٠

٤ س − ٣ ص − ع = ٠

المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}$

∵ |أ| ≠ ٠

∴ ر (أ) = ر (أ°) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ المعادلات الحل الصفرى فقط

المعادلة المصفوفية

$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}$

، ∵ |أ| ≠ ٠

∵ ر (أ) = ر (أ°) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ للمعادلات الحل الصفرى فقط.

③ س + ٢ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠

، ٣ س − ٤ ص + ٢ ع = ٠

المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$

، ∵ |أ| ≠ صفر

∴ ر (أ) = ر (أ°) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ للمعادلات الحل الصفرى فقط.

١٦

① س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠

، ٣ س − ص + ٢ ع = ٠

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ ر (أ) = ر (أ°) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول.

، لإيجاد صورة الحل نضع س = ل

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ ل + ٢ ص + ٣ ع = ٠ (١)

وبالتعويض فى المعادلة الثالثة

∴ ٣ ل − ص + ٢ ع = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ٧ ل + ٧ ع = ٠

∴ ع = − ل

، من (١) : ∴ ل + ٢ ص + ٣ (− ل) = ٠

∴ ص = ل

∴ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول على الصورة (ل ، ل ، − ل)

② ٢ س − ص + ٣ ع = ٠

، ٤ س − ٢ ص + ٦ ع = ٠

، س + ٢ ع = ٠

$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}س\\ص\\ع\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ أ = $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ، |أ| = ٠

، $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} \neq$ صفر

∴ ر (أ) = ر (أ°) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 35$

$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ٣

④ المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 15$

$\therefore \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{1}{3}$ ، ص = $\frac{10}{3}$ ، ع = −٣

⑤ المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 34$

$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ -18 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ -18 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ -18 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

⑥ المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 11$

$\therefore \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 8 & -6 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 8 & -6 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٦

⑦ المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{أ}| = 1200$

$\therefore \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & \text{صفر} & -24 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & \text{صفر} & -24 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & \text{صفر} & -24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٥

① المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

∴ |أ| = −١١ ≠ صفر

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ للمعادلة حل وحيد

$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ -19 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ -19 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ -19 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

② المعادلة المصفوفية :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

∴ |أ| = −٢٢ ≠ صفر

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ للمعادلات حل وحيد

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{-1}{22} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{-1}{22} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ٣

③ المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = \text{صفر}$$

$$، \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq \text{صفر}$$

∴ ر (أ) = ٢

$$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

، ∵ قيمة كل المحددات من الدرجة الثالثة تساوي صفر

∴ ر (أ*) = ٢

∵ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ < عدد المجاهيل.

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

بفرض أن س = ل بالتعويض في المعادلة الثالثة : ل − ٧ ع = ٢

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ل} - 2}{7}$$ ومن المعادلة الثانية :

$$\text{ص} = \frac{-10\,\text{ل} - 15}{7}$$

∴ صورة الحل هي :

$$\left(\text{ل} \,،\, \frac{-10\,\text{ل} - 15}{7} \,،\, \frac{\text{ل} - 2}{7}\right)$$

④ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = -1 \neq \text{صفر}$$

∵ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ للمعادلات حل وحيد

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

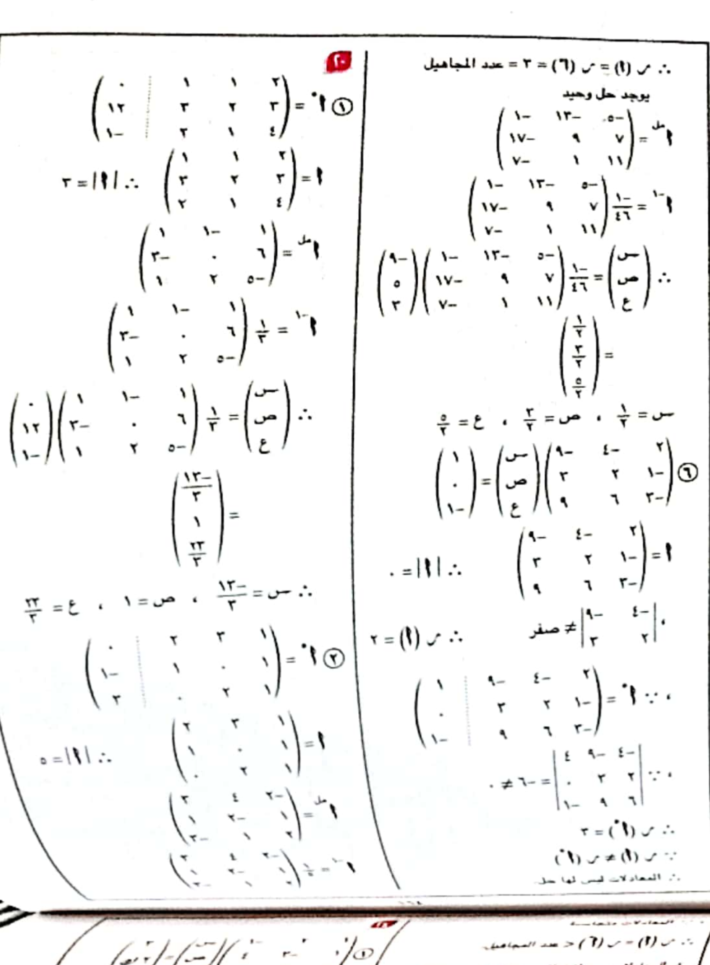
$$\therefore \text{أ}^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = −٢ ، ع = ٢

⑤ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = -46 \neq 0$$



∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

يوجد حل وحيد

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & -1 \\ 7 & 9 & -17 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{-1}{46} \begin{pmatrix} -5 & -13 & -1 \\ 7 & 9 & -17 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{-1}{46} \begin{pmatrix} -5 & -13 & -1 \\ 7 & 9 & -17 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{1}{2} \,،\, \text{ص} = \frac{3}{2} \,،\, \text{ع} = \frac{5}{2}$$

⑥ $$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 0$$

$$، \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq \text{صفر} \quad \therefore \text{ر (أ)} = 2$$

$$، \because \text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -9 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & -1 \end{array}\right)$$

$$، \because \begin{vmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

∴ ر (أ*) = ٣

∵ ر (أ) ≠ ر (أ*)

∴ المعادلات ليس لها حل.

٢٠

① $$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 3$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{3} \\ 1 \\ \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-13}{3} \,،\, \text{ص} = 1 \,،\, \text{ع} = \frac{23}{3}$$

② $$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 5$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ١ ، ع = −٢

③ $$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 5$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

س = −٢ ، ص = ١ ، ع = ١

④ $$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 52$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 22 \\ 1 & 9 & -31 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 22 \\ 1 & 9 & -31 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

٢١

المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 179$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -6 & 31 & 22 \\ 41 & -3 & -31 \\ -16 & 23 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{179} \begin{pmatrix} -6 & 31 & 22 \\ 41 & -3 & -31 \\ -16 & 23 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{179} \begin{pmatrix} -6 & 31 & 22 \\ 41 & -3 & -31 \\ -16 & 23 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

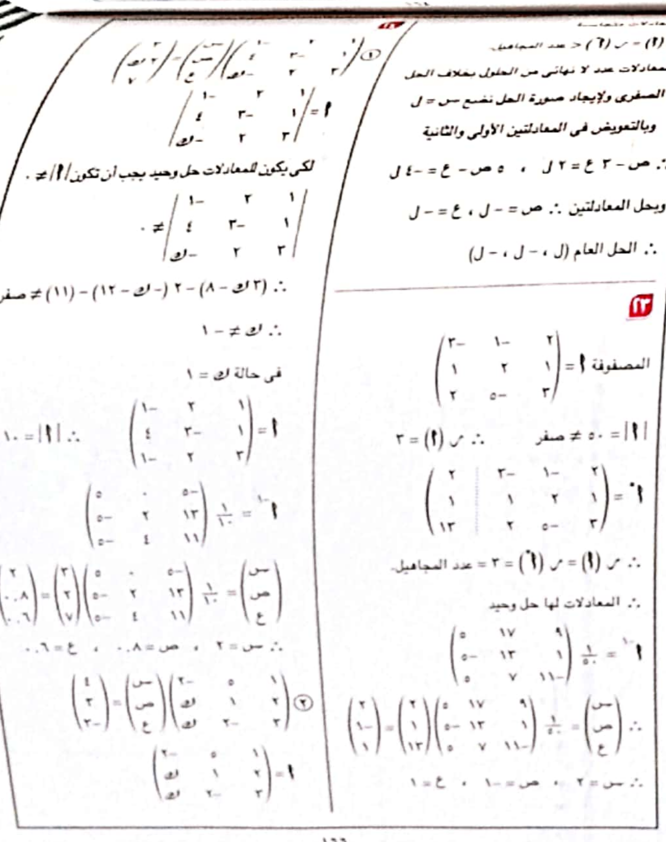
∴ م.ح = {(٢ ، ١ ، ١)}

٢٢

المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = \text{صفر}$$



∴ المعادلات متجانسة

∵ ر (أ) = ر (أ*) < عدد المجاهيل.

∴ للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري ولإيجاد صورة الحل نضع س = ل وبالتعويض في المعادلتين الأولى والثانية

∴ ص − ٣ ع = ٢ ل ، ٥ ص − ع = −٤ ل

وبحل المعادلتين ∴ ص = − ل ، ع = − ل

∴ الحل العام (ل ، − ل ، − ل)

٢٣

$$\text{المصفوفة أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

|أ| = ٥٠ ≠ صفر ∴ ر (أ) = ٣

$$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ المعادلات لها حل وحيد

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١

٢٤

① $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -\text{ك} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -\text{ك} \end{pmatrix}$$

لكي يكون للمعادلات حل وحيد يجب أن تكون |أ| ≠ ٠

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -\text{ك} \end{vmatrix} \neq 0$$

∴ (٣ ك − ٨) − ٢ (− ك − ١٢) − (١١) ≠ صفر

∴ ك ≠ −١

في حالة ك = ١

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 10$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 13 & 2 & -5 \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 13 & 2 & -5 \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٠.٨ ، ع = ٠.٦

② $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & \text{ك} \\ 3 & -2 & \text{ك} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & \text{ك} \\ 3 & -2 & \text{ك} \end{pmatrix}$$

• لكى يكون للمعادلات حل وحيد يجب أن يكون |أ|

$= \begin{vmatrix} ١ & ٥ & -٢ \\ ٢ & ١ & ك \\ ٣ & -٢ & ك \end{vmatrix} \neq ٠$

∴ ١ (ك + ٢ ك) − ٥ (٢ ك − ٣ ك) − ٢ (−٧) ≠ ٠

∴ ك ≠ $\frac{-٧}{٤}$

فى حالة ك = ١

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & -٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = ٢٢

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٢٢} \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٧ \\ ١ & ٧ & -٥ \\ -٧ & ١٧ & -٩ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٢} \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٧ \\ ١ & ٧ & -٥ \\ -٧ & ١٧ & -٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{-٦}{١١} \\ \frac{٢٠}{١١} \\ \frac{٢٥}{١١} \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{-٦}{١١}$ ، ص = $\frac{٢٠}{١١}$ ، ع = $\frac{٢٥}{١١}$

٢٥

$\begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

لكى يكون للمعادلات عدد غير منته من الحلول

فإن ر (أ) = ر (أ*) < عدد المجاهيل.

وبوضع $\begin{vmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

∴ ك (ك² − ١) − ١ (ك − ١) + ١ (١ − ك) = ٠

∴ ك (ك² − ١) − ك + ١ + ١ − ك = ٠

∴ ك (ك − ١) (ك + ١) − ٢ ك + ٢ = ٠

∴ ك (ك − ١) (ك + ١) − ٢ (ك − ١) = ٠

∴ (ك − ١) (ك² + ك − ٢) = ٠

∴ ك = ١ ، ك = −٢

• عند ك = ١

∴ |أ| = ٠ ∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣

• $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

• ∵ $أ^* = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

• ∵ جميع المحددات من الدرجة ٢ = صفر

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١

∴ يوجد عدد غير منته من الحلول عند ك = ١

• عند ك = −٢ ∴ |أ| = ٠

∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣

• $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

• $أ^* = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٩ \neq ٠$

∴ ر (أ*) = ٣ • ∵ ر (أ) ≠ ر (أ*)

∴ لا يوجد حل عند ك = −٢

٢٦

$\begin{pmatrix} ك & ٢ & -١ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & ك \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ \\ -٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ $أ = \begin{pmatrix} ك & ٢ & -١ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & ك \end{pmatrix}$

لكى يكون للمعادلات حل وحيد |أ| ≠ صفر

∴ $\begin{vmatrix} ك & ٢ & -١ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & ك \end{vmatrix} \neq ٠$

∴ ك (ك + ٣) + ٢ (−٦ + ١) ≠ ٠

∴ ك² + ٣ ك − ١٠ ≠ ٠

∴ (ك − ٢) (ك + ٥) ≠ ٠

∴ ك ≠ ٢ ، ك ≠ −٥

• يكون للمعادلات حل وحيد عند

كل قيم ك ∈ ح − {٢ ، −٥}

• عند ك = ٢ ∴ |أ| = ٠

∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣

• $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -١ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \neq$ صفر

∴ ر (أ) = ٢

• $أ^* = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -١ & -٢ \\ ٠ & ١ & -٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

• ∵ قيمة جميع المحددات من الدرجة ٣ = صفر

∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ عند ك = ٢ يكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول.

• عند ك = −٥ ∴ |أ| = ٠

∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣

• $أ = \begin{pmatrix} -٥ & ٢ & -١ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٥ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = -٥ \neq$ صفر

∴ ر (أ) = ٢

• $أ^* = \begin{pmatrix} -٥ & ٢ & -١ & -٢ \\ ٠ & ١ & -٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٥ & ١ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٢ \\ ١ & -٢ & -٢ \\ ١ & -٥ & ١ \end{vmatrix}$

= ٢ (−٢ − ١٠) + ١ (١ + ٢) − ٢ (−٥ + ٢)

= −٢٨ ≠ صفر

∴ ر (أ*) = ٣ ∴ ر (أ) ≠ ر (أ*)

∴ عند ك = −٥ ليس للمعادلات حل على الإطلاق.

٢٧

① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (ب)

إرشادات للحل تمرين **٢٧** :

① ∵ س مصفوفة غير صفرية على النظم ٣ × ٣

∴ ١ ≤ ر (س) ≤ ٢

[illegible]

∴ جميع المحددات من الدرجة الثانية قيمتها = صفر [illegible]

[illegible]

• ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

• ∵ جميع المحددات من الدرجة الثانية قيمتها = صفر

∴ ر (س) = ١

③ ∵ $ع_٢ = -٢ ع_١$

∴ |س| = صفر

• ∵ المصفوفة غير صفرية

∴ ١ ≤ ر (س) ≤ ٢ ∴ (أ) ، (جـ) خطأ

عند أ = −١ ∴ $س = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٤ & -٥ \\ ١ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$

• ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & -٥ \end{vmatrix} = ١٠ \neq ٠$

∴ ر (س) = ٢ ∴ (ب) خطأ

• عند أ = −٦ ∴ $س = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٤ & -١٠ \\ ١ & -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

• ∵ جميع المحددات من الدرجة الثانية قيمتها = صفر

∴ ر (س) = ١ ∴ (د) صحيحة

[illegible]

∴ أ² ب² + أ² − ب² − ٢ أ ب + ٢ أ ب = صفر

∴ أ² − ب² = − (أ ب)²

∴ أ² − ب² = −٩ (بالتربيع للطرفين)

∴ أ⁴ − ٢ أ² ب² + ب⁴ = ٨١

∴ أ⁴ − ٢ (−٣)² + ب⁴ = ٨١

∴ أ⁴ + ب⁴ = ٨١ + ٢ (−٣)² = ٢٧

⑤ ∵ $أ ب = \begin{pmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ أ_{١٣} \end{pmatrix} (ب_{١١} \; ب_{٢١} \; ب_{٣١})$

$= \begin{pmatrix} أ_{١١}ب_{١١} & أ_{١١}ب_{٢١} & أ_{١١}ب_{٣١} \\ أ_{١٢}ب_{١١} & أ_{١٢}ب_{٢١} & أ_{١٢}ب_{٣١} \\ أ_{١٣}ب_{١١} & أ_{١٣}ب_{٢١} & أ_{١٣}ب_{٣١} \end{pmatrix}$

∴ يوجد تناسب بين عناصر كل صفين أو عمودين

∴ |أ ب| = صفر

وكذلك قيمة أى محدد من الدرجة الثانية = صفر

• ∵ $أ_{ص ع} \neq ٠$ ، $ب_{ص ع} \neq ٠$

∴ ر (أ ب) = ١


ثانيًا
إجابات
الهندسة الفراغية
إجابات تمارين
الوحدة
1
الهندسة والقياس
فى ثلاثة أبعاد

④ س^٢ + ص^٢ + ع^٢ − ٦ ع = ٠
∴ المركز = (٠ ، ٠ ، ٣) ، نق = ٣

⑤ بقسمة المعادلة على (٣)
∴ س^٢ + ص^٢ + ع^٢ − س − ٣ ص − ٢ ع + ١ = ٠
المركز = (١/٢ ، ٣/٢ ، ١)
، نق = √(١/٤ + ٩/٤ + ١ − ١) = √١٠ / ٢
∴ المساحة = ٤ π (√١٠ / ٢)^٢ = ١٠ π سم^٢

⑥ المركز = (١ ، −٢ ، ٠)
، نق = √(١ + ٤ + ٠ − ٠) = √٥

٤

مركز الكرة (٢ ، −١ ، ٣)
نجعل ب = (س ، ص ، ع)
((−٦ + س)/٢ ، (٣ + ص)/٢ ، (٢ + ع)/٢) = (٢ ، −١ ، ٣)

(−٦ + س)/٢ = ٢	(٣ + ص)/٢ = −١	(٢ + ع)/٢ = ٣
−٦ + س = ٤	٣ + ص = −٢	٢ + ع = ٦
س = ١٠	ص = −٥	ع = ٤

∴ ب (١٠ ، −٥ ، ٤)

٥

إذا كانت : (أ/٢)^٢ + (ب/٢)^٢ + (جـ/٢)^٢ + د > صفر
أى أن : أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ + ٤ د > ٠ .

٦

م$_١$ (٢ ، −٤ ، ٢) ، نق$_١$ = ١
، م$_٢$ (−٤ ، ٤ ، ٢) ، نق$_٢$ = ٢
∴ م$_١$ م$_٢$ = √(٦^٢ + (−٨)^٢ + ٠^٢) = ١٠ وحدات.
∵ نق$_١$ + نق$_٢$ < م$_١$ م$_٢$
∴ الكرتان متباعدتان أى غير متقاطعتين.

٧

م$_١$ = (٣ ، ٠ ، ٣) ، نق$_١$ = ٤
، م$_٢$ = (−١ ، ٤ ، ك) ، نق$_٢$ = ٥
∴ م$_١$ م$_٢$ = √((٤)^٢ + (−٤)^٢ + (٣ − ك)^٢)
= √(٣٢ + (٣ − ك)^٢)
فى حالة التماس من الداخل : م$_١$ م$_٢$ = | نق$_٢$ − نق$_١$ |
√(٣٢ + (٣ − ك)^٢) = ٥ − ٤ = ١
∴ ٣٢ + (٣ − ك)^٢ = ١
∴ (٣ − ك)^٢ = −٣١ (مرفوض)
فى حالة التماس من الخارج : م$_١$ م$_٢$ = نق$_٢$ + نق$_١$
∴ √(٣٢ + (٣ − ك)^٢) = ٥ + ٤ = ٩
∴ ٣٢ + (٣ − ك)^٢ = ٨١   ∴ (٣ − ك)^٢ = ٤٩
∴ ٣ − ك = ± ٧   ∴ ك = ١٠ أو −٤

٨

① مركزها (٠ ، ٠ ، ٢) أو (٠ ، ٠ ، −٢) ، نق = ٢
المعادلة : س^٢ + ص^٢ + (ع − ٢)^٢ = ٤
أو س^٢ + ص^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٤
② النقطة على المحور س
∴ تمس المستوى ص ع   ∴ نق = ٣
∴ المعادلة : (س − ٣)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩
③ نق = ٣
∴ المعادلة :
(س + ٣)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع − ٤)^٢ = ٩
④ ∴ نق = | −٣ | = ٣
المعادلة : (س + ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع − ٥)^٢ = ٩
⑤ نق = | ٤ − ٣ | = ١
المعادلة : (س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع − ٤)^٢ = ١

⑥ نفرض أن معادلة الكرة :
س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص
+ ٢ ن ع + حـ = ٠ .
(٠ ، ٠ ، ٠) ∈ للكرة   ∴ حـ = ٠ .
(٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للكرة   ∴ ١٦ + ٨ ن + ٠ = ٠ .
ن = −٢
، (−٥ ، −٤ ، ١) ∈ للكرة
٢٥ + ١٦ + ١ − ١٠ ل − ٨ ك − ٤ = ٠ .
∴ ١٠ ل + ٨ ك = ٣٨
∴ ٥ ل + ٤ ك = ١٩   (١)
، (٣ ، ٤ ، −٥) ∈ للكرة
٩ + ١٦ + ٢٥ + ٦ ل + ٨ ك + ٢٠ = ٠ .
٦ ل + ٨ ك = −٧٠
∴ ٣ ل + ٤ ك = −٣٥   (٢)
من (١) ، (٢) : ∴ ل = ٢٧ ، ك = −٢٩
∴ المعادلة :
س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٥٤ س − ٥٨ ص + ٤ ع = ٠ .

⑦ نفرض أن معادلة الكرة هى :
س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص
+ ٢ ن ع + حـ = ٠ .
(٤ ، ٠ ، ٠) ∈ للكرة
١٦ + ٠ + ٠ + ٨ ل + ٠ + ٠ + حـ = ٠ .
∴ ل = −١/٨ (حـ + ١٦)
(٠ ، ٤ ، ٠) ∈ للكرة ، (٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للكرة
∴ ك = −١/٨ (حـ + ١٦) ، ن = −١/٨ (حـ + ١٦)
∴ ل = ك = ن = −١/٨ (حـ + ١٦)
ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ − حـ = نق^٢
∴ ٣ ل^٢ − حـ = نق^٢

نق^٢ = ٣ (١/٦٤ (حـ + ١٦)^٢) − حـ
= ٣/٦٤ (حـ^٢ + ٣٢ حـ + ٢٥٦) − حـ
= ٣/٦٤ (حـ^٢ + ٣٢/٣ حـ + ٢٥٦)
= ٣/٦٤ [(حـ + ١٦/٣)^٢ + ٢٠٤٨/٩]
أقل قيمة نق عندما حـ = −١٦/٣
∴ نق^٢ = ٢٠٤٨/٩ × ٣/٦٤
∴ نق = √(٣٢/٣) = ٤√٦ / ٣
ل = −١/٨ (−١٦/٣ + ١٦) = −٤/٣ = ك = ن
∴ المركز = (٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)
المعادلة : (س − ٤/٣)^٢ + (ص − ٤/٣)^٢
+ (ع − ٤/٣)^٢ = ٣٢/٣

حل آخر :

لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة يصنعوا مثلث متساوى الأضلاع أطوال أضلاعه = ٤√٢
∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = ٤√٢ / (٢ جا ٦٠) = ٤√٦ / ٣
مركزها ((٤ + ٠ + ٠)/٣ ، (٠ + ٤ + ٠)/٣ ، (٠ + ٠ + ٤)/٣)
= (٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)
∴ المعادلة : (س − ٤/٣)^٢ + (ص − ٤/٣)^٢
+ (ع − ٤/٣)^٢ = ٣٢/٣

⑧ الكرة تمس مستويات الإحداثيات
س ع ، س ص ، ص ع
∴ مركز الكرة هو (± نق ، ± نق ، ± نق)
، ∵ الكرة تمر بالنقطة د (٣ ، ٦ ، ٣) والتى جميع إحداثياتها موجبة.
∴ إحداثيات المركز موجبة وهى (نق ، نق ، نق)
، ∵ أ نقطة تماس الكرة مع المستوى س ع

∴ أ (نق ، ٠ ، نق)
، ∵ أد قطر فى الكرة
∴ منتصف أد = مركز الكرة
∴ ((نق + ٣)/٢ ، (٠ + ٦)/٢ ، (نق + ٣)/٢) = (نق ، نق ، نق)
∴ نق = ٣ ، إحداثيات المركز (٣ ، ٣ ، ٣)
∴ معادلة الكرة هى :
(س − ٣)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع − ٣)^٢ = ٩

٩

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة
المحور س معادلته ص = ٠ ، ع = ٠
من المعادلة :
(س − ٢)^٢ + ٩ + ١ = ١٤   (س − ٢)^٢ = ٤
س − ٢ = ± ٢   س = ٠ أ، ٤
∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٠)
∴ أب = ٤ وحدة طول

١٠

نفرض المركز هو (٠ ، ب ، ٠)
∴ المركز يُبعد مسافات متساوية عن النقط المعطاة
∴ √(١^٢ + (٣ − ب)^٢ + ٢^٢)
= √((−٢)^٢ + (٤ − ب)^٢ + ٢^٢)
٥ + (٣ − ب)^٢ = ٨ + (٤ − ب)^٢
٥ + ٩ − ٦ ب + ب^٢ = ٨ + ١٦ − ٨ ب + ب^٢
٢ ب = ١٠   ∴ ب = ٥
∴ المركز (٠ ، ٥ ، ٠)
نق = √(١^٢ + (−٢)^٢ + ٢^٢) = ٣
المعادلة : س^٢ + (ص − ٥)^٢ + ع^٢ = ٩

١١

نفرض أن المعادلة :
س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + حـ = ٠ .
∴ المركز = (−ل ، ٠ ، −ن)
حيث ك = ٠ يقع فى المستوى س ع.
، ∵ أ (٠ ، ٨ ، ٠) ∈ للكرة
٦٤ + حـ = ٠   حـ = −٦٤
، حـ (٠ ، ١٢ ، ٤) ∈ للكرة
٠ + ١٤٤ + ١٦ + ٨ ن − ٦٤ = ٠   ∴ ن = −١٢
، ب (٤ ، ٦ ، ٢) ∈ للكرة
١٦ + ٣٦ + ٤ + ٨ ل + ٤ ن − ٦٤ = ٠
٢ ل + ن = ٢
∴ ٢ ل = ١٤   ∴ ل = ٧
∴ المعادلة هى :
س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١٤ س − ٢٤ ع − ٦٤ = ٠

١٢

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة المحور س
معادلته ص = ٠ ، ع = ٠
من المعادلة (س − ٣)^٢ + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩
∴ س − ٣ = ± ٣   ∴ س = ٠ أ، س = ٦
∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠ ، ٠)
وبالمثل نوجد نقط تقاطع المحور ص مع الكرة
بوضع س = ٠ ، ع = ٠
∴ ٩ + (ص + ٤)^٢ + ١٤٤ = ١٦٩
∴ ص + ٤ = ± ٤   ∴ ص = ٠ أ، ص = −٨
∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، −٨ ، ٠)
∴ النقط الثلاث أ ، ب ، حـ تصنع مثلث قائم
رأسه أ (٠ ، ٠ ، ٠) ومركز المقطع منتصف ب حـ
= (٣ ، −٤ ، ٠) ونصف قطره = ٥ وحدة طول
∴ مساحة المقطع = π نق^٢ = ٢٥ π وحدة مربعة

١٣

∵ الكرة تمس المستوى س ع ونصف قطرها ٣
| م + ١ | = ٣
∴ م + ١ = ٣   ∴ م = ٢
أ، م + ١ = −٣   ∴ م = −٤
∵ الكرة تمس المستوى ص ع ونصف قطرها ٣
∴ | ل − ٢ | = ٣
∴ ل − ٢ = ٣ ومنها ل = ٥ أو ل − ٢ = −٣
ومنها ل = −١

١٤

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من المحاور الثلاثة
∴ مركز الكرة هو (أ ، أ ، أ) حيث أ ∈ ح$^+$
، بعد المركز عن أى محور = نق
∴ √(أ^٢ + أ^٢) = ٤√٢
∴ √٢ أ = ٤√٢   ∴ أ = ٤
∴ معادلة الكرة هى :
(س − ٤)^٢ + (ص − ٤)^٢ + (ع − ٤)^٢ = ٣٢

١٥

∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الثلاثة
∴ | أ | = ٢√٢   ∴ أ = ± ٢√٢
∴ نصف قطر الكرة = بعد المركز عن أى محور
= √((٢√٢)^٢ + (٢√٢)^٢) = ٤ وحدة طول
∴ معادلة الكرة هى :
(س − ٢√٢)^٢ + (ص − ٢√٢)^٢
+ (ع − ٢√٢)^٢ = ١٦
أ،
(س + ٢√٢)^٢ + (ص − ٢√٢)^٢
+ (ع − ٢√٢)^٢ = ١٦

١٦

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (د)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٦ :

① ∵ الكرة تمس محورى الإحداثيات س ، ص
∴ √((م − ١)^٢ + (٥)^٢) = √((٣)^٢ + (٥)^٢)
∴ (م − ١)^٢ = (٣)^٢ = ٩
∴ م − ١ = ± ٣   ∴ م = ١ ± ٣
∴ م = ٤ أ، −٢
∴ مركز الكرة هى (٣ ، ٣ ، ٥) أ، (٣ ، −٣ ، ٥)
، نق = √((٣)^٢ + (٥)^٢) = √٣٤
∴ معادلة الكرة هى :
(س − ٣)^٢ + (ص ± ٣)^٢ + (ع − ٥)^٢ = ٣٤
② لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة ويصنعوا مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه
= √((٠ − ٥)^٢ + (٠ − ٠)^٢ + (٥ − ٠)^٢) = ٥√٢
∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = ٥√٢ / (٢ جا ٦٠) = ٥√٦ / ٣
③ لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة ويصنعوا مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه
= √((٥ − ٠)^٢ + (٥ − ٥)^٢ + (٠ − ٥)^٢) = ٥√٢
∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = ٥√٢ / (٢ جا ٦٠) = ٥√٦ / ٣
④ ∵ المحاور س ، ص ، ع تقسم الفراغ إلى ٨ أثمان
∴ عدد الكرات التى تمس محاور الإحداثيات الثلاثة = ٨ كرات.
⑤ ∵ الكرة تمس مستويات الإحداثيات ، نق = ٨ وحدات
∴ مركز الكرة = (٨ ، ٨ ، ٨) حيث إن إحداثيات المركز موجبة

∴ معادلة الكرة هي
(س − ٨)^{2} + (ص − ٨)^{2} + (ع − ٨)^{2} = ٦٤

⑥ ∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الموجبة ، نق = ٨ وحدات
∴ مركز الكرة = ($\frac{٨}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$)
= (٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$)
∴ معادلة الكرة هي (س − ٤ $\sqrt{٢}$)^{2} + (ص − ٤ $\sqrt{٢}$)^{2} + (ع − ٤ $\sqrt{٢}$)^{2} = ٦٤

⑦ ∵ الكرة تمس جميع أوجه المكعب
∴ طول قطر الكرة = طول ضلع المكعب = ١٠ سم
∴ نق = ٥ سم
، ∵ أحد رؤوس المكعب هي نقطة الأصل
∴ الكرة تمس مستويات الإحداثيات
∴ مركز الكرة هي (٥ ، ٥ ، ٥) حيث إن إحداثيات المركز موجبة
∴ معادلة الكرة (س − ٥)^{2} + (ص − ٥)^{2} + (ع − ٥)^{2} = ٢٥
أي أن س^{2} + ص^{2} + ع^{2} − ١٠ س − ١٠ ص − ١٠ ع + ٥٠ = ٠

⑧ ∵ الكرة تمر برؤوس المكعب
∴ طول قطر الكرة = طول قطر المكعب = ١٢ $\sqrt{٣}$
∴ نق = ٦ $\sqrt{٣}$
∴ معادلة الكرة هي س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = ١٠٨

⑨ ∵ مركز الكرة قبل الانتقال هو (٢ ، −١ ، ٣)
، ∵ الانتقال = (٣ ، ٠ ، ٠)
∴ مركز الكرة بعد الانتقال = (٥ ، −١ ، ٣)
∴ معادلة الكرة بعد الانتقال هي
(س − ٥)^{2} + (ص + ١)^{2} + (ع − ٣)^{2} = ٩

⑩ لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور السينات نضع ص = ٠ ، ع = ٠
∴ (س − ١)^{2} + ٤ + ١ = ٦
∴ (س − ١)^{2} = ١ ∴ س − ١ = ± ١
∴ س = ٢ أو صفر
، لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور الصادات نضع س = ٠ ، ع = ٠
∴ ١ + (ص − ٢)^{2} + ١ = ٦
∴ (ص − ٢)^{2} = ٤ ∴ ص − ٢ = ± ٢
∴ ص = ٤ ، صفر
∴ نقط التقاطع مع محوري الإحداثيات س ، ص هي (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ٠)
∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٤ = ٤ وحدة مربعة

⑪ ∵ نصف قطر الكرة = $\sqrt{٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ وحدة طول
∵ الكرة تمر برؤوس المكعب
∴ طول قطر المكعب = طول قطر الدائرة
= ١٠ $\sqrt{٣}$ وحدة طول
∴ طول حرف المكعب = ١٠ وحدة طول
∴ المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{2} = ٦ (١٠)^{2}
= ٦٠٠ وحدة مربعة

⑫ ∵ معادلة المستوى س ص هي ع = ٠ (١)
، ∵ معادلة الكرة هي (س − ٣)^{2} + (ص − ٤)^{2} + (ع − ١٢)^{2} = ١٦٩ (٢)
وبحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا
∴ (س − ٣)^{2} + (ص − ٤)^{2} + (٠ − ١٢)^{2} = ١٦٩
∴ (س − ٣)^{2} + (ص − ٤)^{2} = ٢٥
وهي معادلة دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات
∴ مساحتها = π نق^{2} = ٢٥ π وحدة مربعة

2 اجابات تمارين

1
− س ، − ص ، − ع

2
① ‖أ‖ = $\sqrt{٢^{2} + (-١)^{2} + ٠^{2}}$ = $\sqrt{٥}$
② ‖أ‖ = $\sqrt{١^{2} + ٢^{2} + (-٢)^{2}}$ = ٣
③ ‖ب‖ = $\sqrt{٥^{2} + (-١)^{2} + (٢\sqrt{٢})^{2}}$ = ٧
④ ‖حـ‖ = $\sqrt{٠^{2} + ٠^{2} + ١^{2}}$ = ١
⑤ ‖ب‖ = $\sqrt{٣^{2} + ٤^{2} + ٠^{2}}$ = ٥

3
① أ − $\frac{١}{٢}$ ب = −٣ س − ٧ ص − ٣ ع
② ٣ ب − ٢ أ = ٦ س + ٢٢ ص + ٢٢ ع
③ أ − ٣ ب = −٣ س − ١٧ ص − ٢٣ ع
④ ٢ أ + ٣ ب = −٦ س + ٢ ص + ٢٦ ع

4
① أ + ب = (٦ ، −٥ ، ١)
② ٣ أ − $\frac{١}{٢}$ حـ = (٨ ، −٩ ، ٢)
③ $\frac{٢}{٣}$ ب + $\frac{٢}{٣}$ حـ = (٢ ، −٣ ، ٢)

5
① ٥ حـ − ٢ ء = (١٠ ، −١٥ ، ٥) + (٠ ، −٤ ، ٤)
= (١٠ ، −١٩ ، ٩)
② ٣ أ − ٤ ء = حـ ∴ ٣ أ = حـ + ٤ ء
∴ أ = $\frac{١}{٣}$ حـ + $\frac{٤}{٣}$ ء
= ($\frac{٢}{٣}$ ، −١ ، $\frac{١}{٣}$) + (٠ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$)
= ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٧}{٣}$)

6
∴ ٢ أ = ٢ حـ − ٣ ء + ٢ هـ
= (٨ ، −٢ ، ٤) + (٩ ، −١٢ ، −١٥)
+ (−١٠ ، ٢ ، ٦) = (٧ ، −١٢ ، −٥)
∴ أ = ($\frac{٧}{٢}$ ، −٦ ، $\frac{-٥}{٢}$)

7
① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب)
⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ) ⑨ (أ) ⑩ (أ)
⑪ (ب) ⑫ (ب) ⑬ (جـ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)
⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (د)
㉑ (د) ㉒ (ب) ㉓ (جـ) ㉔ (جـ) ㉕ (د)
㉖ (جـ) ㉗ (أ) ㉘ (جـ) ㉙ (ب) ㉚ (جـ)
㉛ (ب) ㉜ (جـ) ㉝ (ب) ㉞ (ب) ㉟ (أ)
㊱ (ب) ㊲ (د) ㊳ (جـ) ㊴ (أ) ㊵ (د)
㊶ (ب) ㊷ (جـ) ㊸ (ب) ㊹ (ب) ㊺ (جـ)
㊻ (جـ) ㊼ (جـ) ㊽ (جـ) ㊾ (ب) ㊿ (أ)
(٥١) (د) (٥٢) (جـ) (٥٣) (د) (٥٤) (د)

8
٢ ل + ٢ = −٤ ∴ ٢ ل = −٦ منها ل = −٣
، ٩ = ن^{2} ∴ ن = ± ٣
، م − ٤ = ١٤ ∴ م = ١٨

9
ل − ٤ = ٥ ، ل = ٩
، م^{2} − ٣ = ١ ∴ م^{2} = ٤
ومنها م = ± ٢ ، ١٠ = ن^{2}
∴ ن = ± ١

10
٢ س + ١ = −١ ∴ ٢ س = −٢
ومنها س = −١
، ٥ = ص^{2} − ٤
ص^{2} = ٩ ومنها ص = ± ٣
، ك + ٤ = س + ١ ومنها ك = −٤

11
① (٦ + ٢ ن ، ٢ م − ٦ ، ٢ ل + ١٢) = (٣ ، ٢ ، ٤)
٦ + ٢ ن = ٣ ∴ ٢ ن = −٣
ومنها ن = −١
٢ م − ٦ = ٢
∴ ٢ م = ٨ ومنها م = ٤ ، ٢ ل + ١٢ = ٤
٢ ل = −٨ ومنها ل = −٤

③ −٢ ل − ٣ م + ٠ = −٨
٢ ل + ٣ م = ٨ (١)
٢ ل + م + ٠ = ٥ ٢ ل + م = ٥ (٢)
ل + ٢ م + ن = ٨ (٣)
بحل (١) ، (٢) ينتج أن ل = ١ ، م = ٢
بالتعويض في (٣) ينتج أن : ن = ٣

12
① ب − حـ = −١٠ س − ١٤ ص − ٥ ع
، ٢ (ب + حـ) = ٢ (٦ س + ٢٤ ص + ٣ ع)
= ١٢ س + ٤٨ ص + ٦ ع
② نفرض أن حـ = ك أ + م ب
(٨ ، ١٩ ، ٤) = ك (٤ ، ٣ ، ٢) + م (−٢ ، ٥ ، −١)
٤ ك − ٢ م = ٨ (١)
٣ ك + ٥ م = ١٩ (٢)
٢ ك − م = ٤ (٣)
بحل (١) ، (٢) : ك = ٣ ، م = ٢ (تحقق المعادلة ٣)
∴ حـ = ٣ أ + ٢ ب

13
‖أ‖ = $\sqrt{(-٣)^{2} + ٢^{2} + ١^{2}}$ = $\sqrt{١٤}$
‖أ + ب‖ = ‖(−١ ، ٥ ، ١)‖
= $\sqrt{(-١)^{2} + ٥^{2} + ١^{2}}$ = ٣ $\sqrt{٣}$

14
٢ (أ − ب) = ٧ ب − ٢ أ
٢ أ − ٢ ب = ٧ ب − ٢ أ
∴ ٤ أ = ٩ ب
ب = $\frac{٤}{٩}$ أ = $\frac{٤}{٩}$ (٤ ، −٦ ، ٢) = (٢ ، −٣ ، ١)
∴ ‖ب‖ = $\sqrt{٢^{2} + (-٣)^{2} + (١)^{2}}$ = $\sqrt{١٤}$

(١) ... = (٢ ، ١ ، −٧)
‖أ ب‖ = $\sqrt{٩ + ١ + ٤٩}$ = $\sqrt{٥٩}$

16
∴ ٤ ك ‖أ‖ = ٣ ‖أ‖ ∴ ٤ ك = ٣ منها ك = $\frac{٣}{٤}$

17
∴ ٨ ‖أ‖ = ٥ |ك| ‖أ‖
٨ = ٥ |ك| |ك| = $\frac{٨}{٥}$ منها ك = ± $\frac{٨}{٥}$

18
الطرف الأيمن = $\sqrt{ك^{2} + ٠ + ٠}$ = |ك|
الطرف الأيسر = |ك| $\sqrt{١^{2} + ٠ + ٠}$ = |ك|
∴ الطرفان متساويان.
حل آخر : ∵ أ = (ك ، ٠ ، ٠)
∴ أ = ك (١ ، ٠ ، ٠) ∴ أ = ك س
∴ ‖أ‖ = |ك| ‖س‖

19
① أ + ٢ حـ = (١٧ ، ٠ ، −٢)
‖أ + ٢ حـ‖ = $\sqrt{٢٩٣}$
② ٥ ب + ٣ أ = (−١ ، ١٤ ، ٢٢)
‖٥ ب + ٣ أ‖ = $\sqrt{٦٨١}$
③ أ + $\frac{١}{٢}$ ب = (٢ ، ٠ ، ٥)
‖أ + $\frac{١}{٢}$ ب‖ = $\sqrt{٢٩}$
④ أ + ب − ٢ حـ = (−١٣ ، ٠ ، ١٢)
‖أ + ب − ٢ حـ‖ = $\sqrt{٣١٣}$
⑤ ٢ أ + ٣ ب − ٤ حـ = (−٢٨ ، ٤ ، ٢٦)
‖٢ أ + ٣ ب − ٤ حـ‖ = ٦ $\sqrt{٤١}$

① ٢ أ + ٣ ب = (٢ ، ٠ ، ٤) + (٣ ، ٠ ، ٣) ...
= (٧ ، ٠ ، ٢)
② ‖أ + ب‖ = ‖(١ ، −٥ ، ١)‖ = ٣ $\sqrt{٣}$ = ٥.١٩٦
‖أ‖ + ‖ب‖ = $\sqrt{١٤}$ + $\sqrt{٥}$ = ٥.٩٨
نلاحظ أن : ‖أ + ب‖ < ‖أ‖ + ‖ب‖

21
‖أ‖ + ‖ب‖ > ‖أ + ب‖

22
① ‖أ‖ = ١٢ ∴ ى$_{أ}$ = $\frac{أ}{‖أ‖}$ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)
② ‖ب‖ = $\sqrt{٦}$ ∴ ى$_{ب}$ = ($\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٦}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٦}}$)
③ ‖حـ‖ = ٥ ∴ ى$_{حـ}$ = ($\frac{٣}{٥}$ ، ٠ ، $\frac{-٤}{٥}$)
④ ‖ء‖ = $\sqrt{١٤}$ ∴ ى$_{ء}$ = ($\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$)
⑤ ‖هـ‖ = ١٣ ∴ ى$_{هـ}$ = ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$ ، ٠)
⑥ ‖م‖ = ٣ ∴ ى$_{م}$ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$)

23
① ‖أ‖ = $\sqrt{١٤}$ ∴ ى$_{أ}$ = ($\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$)
② ‖ب‖ = $\sqrt{٢١}$ ∴ ى$_{ب}$ = ($\frac{٤}{\sqrt{٢١}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٢١}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢١}}$)
③ أ ب = ب − أ = (٥ ، −١ ، −٣)
‖أ ب‖ = $\sqrt{٣٥}$
∴ ى$_{أ ب}$ = ($\frac{٥}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{-٣}{\sqrt{٣٥}}$)
④ ى$_{ب أ}$ = ($\frac{-٥}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٣٥}}$)

... ‖أ‖ = ٥ ، ‖ب‖ = ٣
∴ أ = ٥ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)
ب = ٣ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

25
$\sqrt{ك^{2} + (\frac{٢}{٣})^{2} + (\frac{٢}{٣})^{2}}$ = ١
ك^{2} = ١ − ($\frac{٤}{٩}$ + $\frac{٤}{٩}$) = $\frac{١}{٩}$ ∴ ك = ± $\frac{١}{٣}$

26
① ($\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}$)^{2} + ($\frac{٤}{٥}$)^{2} + ($\frac{ن}{٥}$)^{2} = ١
$\frac{٨}{٢٥}$ + $\frac{١٦}{٢٥}$ + $\frac{ن^{2}}{٢٥}$ = ١
ن^{2} = ٢٥ − (٨ + ١٦) = ١ ∴ ن = ± ١
، ∵ حـ = ب = ى$_{أ}$ ∴ ن = ١
∴ $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}$ س + $\frac{٤}{٥}$ ص + $\frac{١}{٥}$ ع
= ل س + ٤ م ص + $\frac{١}{٥}$ ع
∴ ل = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}$ ، ٤ م = $\frac{٤}{٥}$ ∴ م = $\frac{١}{٥}$
② أ = ‖أ‖ ى$_{أ}$ = ١٥ ($\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$)
= (−٦ $\sqrt{٢}$ ، ١٢ ، ٣)

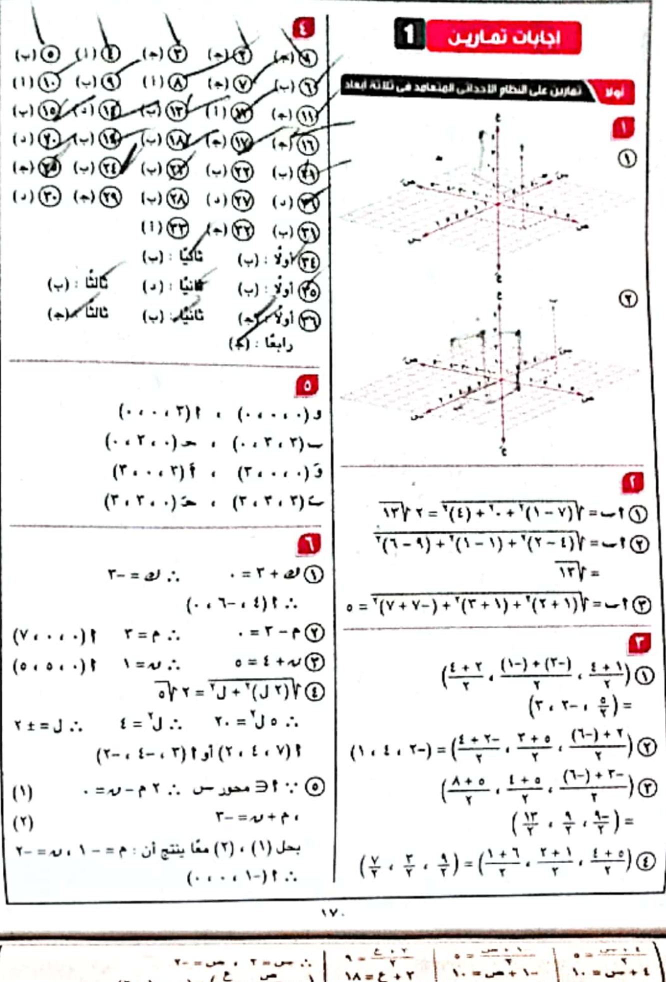
27
① ‖أ‖ = ٦ ∴ ى$_{أ}$ = ($\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{-٣}{٦}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$)
② ‖ب‖ = ٤ ∴ ى$_{ب}$ = ($\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)
③ ‖حـ‖ = ٥ ∴ ى$_{حـ}$ = ($\frac{٤}{٥}$ ، ٠ ، $\frac{-٣}{٥}$)
④ ‖ء‖ = ١٣ ∴ ى$_{ء}$ = (٠ ، $\frac{-٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$)

إجابات تمارين 1

أولاً: تمارين على النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

1

① ②



2

① أب = √((٧ − ١)^٢ + ٠^٢ + (٤)^٢) = ٢√١٣

② أب = √((٤ − ٢)^٢ + (١ − ١)^٢ + (٩ − ٦)^٢)
= √١٣

③ أب = √((١ + ٢)^٢ + (١ + ٣)^٢ + (−٧ + ٧)^٢) = ٥

3

① ((١ + ٤)/٢ ، ((−٢) + (−١))/٢ ، (٢ + ٤)/٢)
= (٥/٢ ، −٣/٢ ، ٣)

② ((٢ + (−٦))/٢ ، (٥ + ٣)/٢ ، (−٢ + ٤)/٢) = (−٢ ، ٤ ، ١)

③ ((−٣ + (−٦))/٢ ، (٥ + ٤)/٢ ، (٥ + ٨)/٢)
= (−٩/٢ ، ٩/٢ ، ١٣/٢)

④ ((٥ + ٤)/٢ ، (١ + ٢)/٢ ، (٦ + ١)/٢) = (٩/٢ ، ٣/٢ ، ٧/٢)

4

① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب)
⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (أ)
⑪ (جـ) ⑫ (أ) ⑬ (ب) ⑭ (د) ⑮ (ب)
⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (د)
㉑ (ب) ㉒ (ب) ㉓ (ب) ㉔ (ب) ㉕ (جـ)
㉖ (د) ㉗ (د) ㉘ (ب) ㉙ (جـ) ㉚ (د)
㉛ (ب) ㉜ (جـ) ㉝ (أ)
㉞ أولاً: (ب) ثانياً: (ب)
㉟ أولاً: (ب) ثانياً: (د) ثالثاً: (ب)
㊱ أولاً: (جـ) ثانياً: (ب) ثالثاً: (جـ)
رابعاً: (جـ)

5

و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (٣ ، ٠ ، ٠)
ب (٣ ، ٢ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٢ ، ٠)
وَ (٠ ، ٠ ، ٣) ، أَ (٣ ، ٠ ، ٣)
بَ (٣ ، ٢ ، ٣) ، جَـ (٠ ، ٢ ، ٣)

6

① ك + ٣ = ٠ ∴ ك = −٣
∴ أ (٤ ، −٦ ، ٠)

② م − ٣ = ٠ ∴ م = ٣ أ (٠ ، ٠ ، ٧)

③ ن + ٤ = ٥ ∴ ن = ١ أ (٠ ، ٥ ، ٥)

④ √((٢ل)^٢ + ل^٢) = ٢√٥
∴ ٥ل^٢ = ٢٠ ∴ ل^٢ = ٤ ∴ ل = ±٢
أ (٧ ، ٤ ، ٢) أو أ (٣ ، −٤ ، −٢)

⑤ ∵ أ ∈ محور س ∴ ٢م − ن = ٠ (١)
، م + ن = −٣ (٢)
بحل (١) ، (٢) معًا ينتج أن : م = −١ ، ن = −٢
∴ أ (−١ ، ٠ ، ٠)

7

① أب = √((−١)^٢ + (−١)^٢ + (−٤)^٢) = ٣√٢
ب جـ = √((−٢)^٢ + (−٢)^٢ + (−٨)^٢) = ٦√٢
أ جـ = √((−٣)^٢ + (−٣)^٢ + (−١٢)^٢) = ٩√٢
∵ أ جـ = أب + ب جـ
∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

② أب = √(٤^٢ + ١^٢ + ١^٢) = ٣√٢
ب جـ = √(٨^٢ + ٢^٢ + ٢^٢) = ٦√٢
أ جـ = √(١٢^٢ + ٣^٢ + ٣^٢) = ٩√٢
∵ أ جـ = أب + ب جـ
∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

8

أب = √(١^٢ + ٣^٢ + (−٢)^٢) = √١٤
ب جـ = √((−٣)^٢ + (−٢)^٢ + (−١)^٢) = √١٤
أ جـ = √((−٢)^٢ + (١)^٢ + (−٣)^٢) = √١٤
∵ أب = ب جـ = جـ أ
∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع.
مساحته = ١/٢ √١٤ × √١٤ × جا ٦٠°
= ٧√٣/٢ وحدة مربعة.

9

① أب = √(٤^٢ + (−٥)^٢ + ٢^٢) = ٣√٥
ب جـ = √(٣^٢ + (−٧)^٢ + (−١)^٢) = √٥٩
أ جـ = √(١ + ٢^٢ + ٣^٢) = √١٤
∵ (أب)^٢ + (أ جـ)^٢ = (ب جـ)^٢
∴ Δ أ ب جـ قائم في أ
∴ مساحته = ١/٢ × ٣√٥ × √١٤
= ٣√٧٠/٢ وحدة مربعة.

② أب = √(٦^٢ + (−٥)^٢ + ١^٢) = √٦٢
ب جـ = √((−٢)^٢ + (−١)^٢ + ١^٢) = √٦
أ جـ = √(٤^٢ + (−٦)^٢ + ٢^٢) = ٢√١٤
∵ (أب)^٢ = (ب جـ)^٢ + (أ جـ)^٢
∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ
∴ مساحته = ١/٢ × √٦ × ٢√١٤
= ٢√٢١ وحدة مربعة.

10

أب = √(٢^٢ + (−٢)^٢ + (−١)^٢) = ٣
ب جـ = √(٢^٢ + (−٢)^٢ + ١^٢) = ٣
أ جـ = √(٤^٢ + (−٤)^٢ + (٠)^٢) = ٤√٢
∵ أب = ب جـ
∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين.

11

أب = √(٢^٢ + (−٢)^٢ + (٣ − ك)^٢) = √(٨ + (٣ − ك)^٢)
ب جـ = √(٢^٢ + (−٢)^٢ + (ك − ٣)^٢)
= √(٨ + (ك − ٣)^٢)
∴ أب = ب جـ لجميع قيم ك
∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين.
∵ أ جـ = √(٤^٢ + (−٤)^٢ + ٠) = ٤√٢
Δ أ ب جـ يكون متساوي الأضلاع إذا كان
√(٨ + (ك − ٣)^٢) = ٤√٢
∴ ٨ + (ك − ٣)^٢ = ٣٢ ∴ (ك − ٣)^٢ = ٢٤
∴ ك − ٣ = ±٢√٦ ∴ ك = ٣ ± ٢√٦

12

نجعل ب (س ، ص ، ع)
((٤ + س)/٢ ، (−١ + ص)/٢ ، (٣ + ع)/٢) = (٥ ، ٥ ، ٩)

٤ + س = ١٠ ، −١ + ص = ١٠ ، ٣ + ع = ١٨
س = ٦ ، ص = ١١ ، ع = ١٥
∴ ب (٦ ، ١١ ، ١٥)

13

نجعل أ (س ، ص ، ع)
((٤ + س)/٢ ، (−٢ + ص)/٢ ، (ع + ١)/٢) = (−١ ، ٤ ، ٠)
(٤ + س)/٢ = −١ | (−٢ + ص)/٢ = ٤ | (ع + ١)/٢ = ٠
٤ + س = −٢ | −٢ + ص = ٨ | ع + ١ = ٠
س = −٦ | ص = ١٠ | ع = −١
∴ أ (−٦ ، ١٠ ، −١)

14

((ك − ٢ + ٢)/٢ ، (−١ + ن − ٧)/٢ ، (م + ٣ − ٢)/٢)
= (−١ ، ٦ ، −٥)
ك/٢ = −١ | (ن − ٨)/٢ = ٦ | (م + ١)/٢ = −٥
ك = −٢ | ن − ٨ = ١٢ | م + ١ = −١٠
ن = ٢٠ | م = −١١
ك + م − ن = −٢ + (−١١) − ٢٠ = −٣٣

15

ء منتصف أب = (٤ ، ١ ، ١)
هـ منتصف ب جـ = (١ ، ٢ ، ٢)
و منتصف أ جـ = (−١ ، ٦ ، ٠)
ء هـ = √(٣^٢ + (−١)^٢ + (−١)^٢) = √١١
هـ و = √(٢^٢ + (−٤)^٢ + (٢)^٢) = √٢٤ = ٢√٦
ء و = √(٥^٢ + (−٥)^٢ + (١)^٢) = √٥١
المحيط = √١١ + ٢√٦ + √٥١ = ١٥,٤

16

أ (س ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ص ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٠ ، ع)
∴ (س/٢ ، ص/٢ ، ٠) = (١ ، −١ ، ٠)
∴ س = ٢ ، ص = −٢
(٠ ، ص/٢ ، ع/٢) = (٠ ، −١ ، ٢)
∴ ص = −٢ ، ع = ٤
∴ منتصف أ جـ هي ((٢ + ٠)/٢ ، ٠ ، (٠ + ٤)/٢)
= (١ ، ٠ ، ٢)

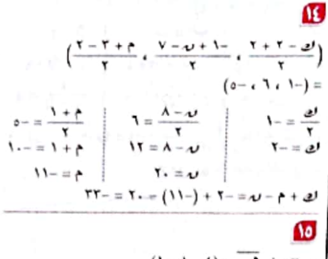
17

① أب = √(٢^٢ + (−١)^٢ + (−٢)^٢) = ٣
ب جـ = √(٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢) = ٣
جـ ء = √(٢^٢ + (−١)^٢ + (−٢)^٢) = ٣
ء أ = √(٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢) = ٣
أ جـ = √(٤^٢ + ١^٢ + (−١)^٢) = ٣√٢
ب ء = √(٠^٢ + ٣^٢ + ٣^٢) = ٣√٢
∴ أب = ب جـ = جـ ء = ء أ
، أ جـ = ء ب
∴ الشكل أ ب جـ ء مربع.

② أب = √(٢^٢ + (−٣)^٢ + ٦^٢) = ٧
ب جـ = √(٦^٢ + ٢^٢ + (−٣)^٢) = ٧
جـ ء = √(٢^٢ + (−٣)^٢ + ٦^٢) = ٧
ء أ = √(٦^٢ + (٢)^٢ + (−٣)^٢) = ٧
∴ أب = ب جـ = جـ ء = ء أ
∴ الشكل أ ب جـ ء معين.

18

نرسم أهـ فيقطع ء و في ن
ومن هندسة الشكل
فإن أ ء هـ و متوازي أضلاع
∴ ن منتصف كل من أهـ ، ء و
∵ ن منتصف ء و



∴ ن = ((١ + ٢)/٢ ، (٢ + ٠)/٢ ، (٦ − ٢)/٢) = (٣/٢ ، ١ ، ٢)
، ن منتصف أهـ حيث أ = (س١ ، ص١ ، ع١)

∴ (٣/٢ ، ١ ، ٢) = ((س١ + ٠)/٢ ، (ص١ + ٣)/٢ ، (ع١ + ٢)/٢)
∴ س١ = ٣ ، ص١ = −١ ، ع١ = ٢
∴ أ = (٣ ، −١ ، ٢)
، ∵ ء منتصف أب حيث ب = (س٢ ، ص٢ ، ع٢)
∴ (١ ، ٢ ، ٦) = ((س٢ + ٣)/٢ ، (ص٢ − ١)/٢ ، (ع٢ + ٢)/٢)
∴ س٢ = −١ ، ص٢ = ٥ ، ع٢ = ١٠
∴ ب = (−١ ، ٥ ، ١٠)
، ∵ هـ منتصف ب جـ حيث جـ = (س٣ ، ص٣ ، ع٣)
∴ (٠ ، ٣ ، ٢) = ((س٣ − ١)/٢ ، (ص٣ + ٥)/٢ ، (ع٣ + ١٠)/٢)
∴ س٣ = ١ ، ص٣ = ١ ، ع٣ = −٦
∴ جـ = (١ ، ١ ، −٦)

ثانيًا: تمارين على معادلة الكرة

1

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (جـ)
⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)
⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (جـ) ⑭ (د) ⑮ (جـ)
⑯ (د) ⑰ (د) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)
㉑ (ب) ㉒ (د) ㉓ (جـ) ㉔ (جـ) ㉕ (ب)
㉖ (د) ㉗ (جـ) ㉘ (جـ) ㉙ (د) ㉚ (جـ)
㉛ (ب) ㉜ (أ) ㉝ (د) ㉞ (د) ㉟ (أ)
㊱ (ب) ㊲ (ب)

2

① (س − ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع − ٤)^٢ = ٩
② (س − ٤)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع − ٣)^٢ = ٥
③ س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٧
④ ٢ نق = √(٣^٢ + ٢^٢ + (−٤)^٢) = √٢٩
∴ نق = √٢٩/٢ المركز = (٣/٢ ، ٣ ، −١)
المعادلة : (س − ٣/٢)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع + ١)^٢
= ٢٩/٤

⑤ ٢ نق = √(٦^٢ + ٤^٢ + (−٨)^٢) = ٢√٢٩
نق = √٢٩
المركز = (−١ ، ١ ، −١)
المعادلة : (س + ١)^٢ + (ص − ١)^٢ + (ع + ١)^٢
= ٢٩

⑥ نق = √(١^٢ + ٥^٢ + ٤^٢) = √٤٢
المعادلة :
(س − ١)^٢ + (ص + ٦)^٢ + (ع − ١)^٢ = ٤٢

⑦ نق = √(١^٢ + (−٢)^٢ + (٢)^٢) = ٣
المعادلة : (س + ١)^٢ + (ص − ٢)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٩

⑧ الكرة تمس المستوى س ص ∴ نق = ٣
المعادلة :
(س + ٢)^٢ + (ص + ٥)^٢ + (ع − ٣)^٢ = ٩

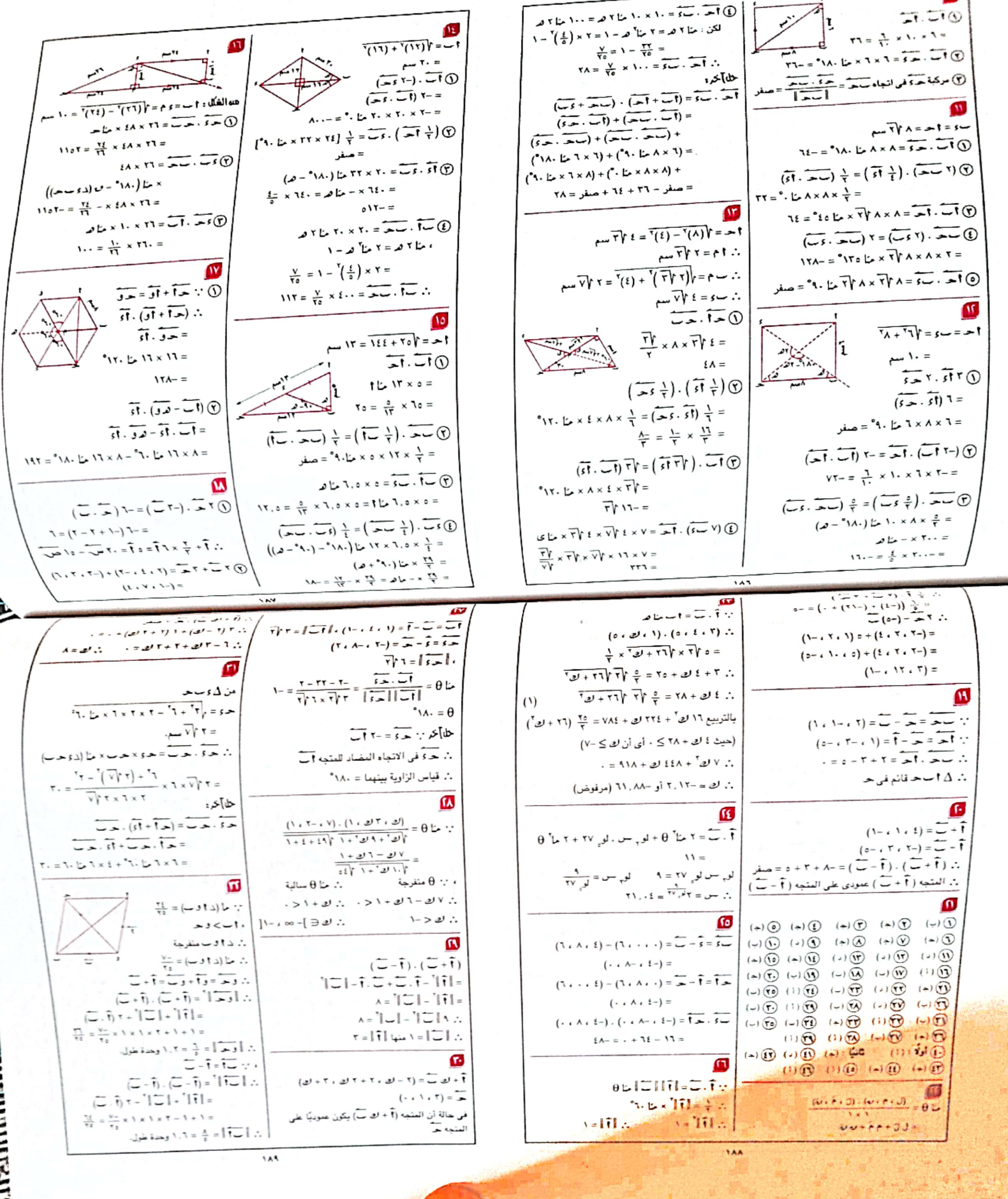
⑨ نق = ٤
المعادلة : س^٢ + (ص − ٤)^٢ + ع^٢ = ١٦

⑩ ∴ مركزها (٣ ، −١ ، ٢)
نق١ = √(٩ + ١ + ٤ + ٢) = ٤
∴ نق٢ = ٢ × ٤ = ٨
∴ المعادلة :
(س − ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع − ٢)^٢ = ٦٤

⑪ ∴ مركزها (٣ ، ٣ ، ٣)
المعادلة : (س − ٣)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع − ٣)^٢ = ٩

3

① المركز = (٣ ، ٥ ، −٢) ، نق = ٥
، حجمها = ٤/٣ π × (٥)^٣ = ٥٠٠/٣ π
② المركز = (٠ ، ٠ ، ٠) ، نق = ٣√٣
③ المركز = (−٢ ، ١ ، ٣)
، نق = √(٤ + ١ + ٩ − ١١) = √٣



١٠

① أب . أحـ = ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = ٣٦

② أب . حـ ء = ٦ × ٦ × جتا ١٨٠° = -٣٦

③ مركبة حـ ء في اتجاه ب حـ = (حـ ء . ب حـ) / ‖ب حـ‖ = صفر

١١

ب ء = أحـ = ٨√٢ سم

① أب . حـ ء = ٨ × ٨ جتا ١٨٠° = -٦٤

② (٢ ب حـ) . (١/٤ أ ء) = ١/٢ (ب حـ . أ ء)
= ١/٢ × ٨ × ٨ × جتا ٠° = ٣٢

③ أب . أحـ = ٨ × ٨√٢ × جتا ٤٥° = ٦٤

④ ب حـ . (٢ ء ب) = ٢ (ب حـ . ء ب)
= ٢ × ٨ × ٨√٢ × جتا ١٣٥° = -١٢٨

⑤ أحـ . ب ء = ٨√٢ × ٨√٢ جتا ٩٠° = صفر

١٢

أحـ = ب ء = √(٦² + ٨²)
= ١٠ سم

① ٣ أ ء . ٢ حـ ء
= ٦ (أ ء . حـ ء)
= ٦ × ٨ × ٦ جتا ٩٠° = صفر

② (-٢ أب) . أحـ = -٢ (أب . أحـ)
= -٢ × ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = -٧٢

③ ب حـ . (٥/٢ ء ب) = ٥/٢ (ب حـ . ء ب)
= ٥/٢ × ٨ × ١٠ جتا (١٨٠° - هـ)
= -٢٠٠ × جتا هـ
= -٢٠٠ × ٤/٥ = -١٦٠

④ أحـ . ب ء = ١٠ × ١٠ جتا ٢ هـ = ١٠٠ جتا ٢ هـ
لكن : جتا ٢ هـ = ٢ جتا² هـ - ١ = ٢ × (٤/٥)² - ١
= ٣٢/٢٥ - ١ = ٧/٢٥
∴ أحـ . ب ء = ١٠٠ × ٧/٢٥ = ٢٨

حل آخر:
أحـ . ب ء = (أب + ب حـ) . (ب حـ + حـ ء)
= (أب . ب حـ) + (أب . حـ ء)
+ (ب حـ . ب حـ) + (ب حـ . حـ ء)
= (٦ × ٨ جتا ٩٠°) + (٦ × ٦ جتا ١٨٠°)
+ (٨ × ٨ × جتا ٠°) + (٨ × ٦ × جتا ٩٠°)
= صفر - ٣٦ + ٦٤ + صفر = ٢٨

١٣

أحـ = √((٨)² - (٤)²) = ٤√٣ سم
∴ أ م = ٢√٣ سم
∴ ب م = √((٢√٣)² + (٤)²) = ٢√٧ سم
∴ ب ء = ٤√٧ سم

① أحـ . حـ ب
= ٤√٣ × ٨ × √٣/٢
= ٤٨

② (١/٢ أ ء) . (١/٣ حـ ء)
= ١/٦ (أ ء . حـ ء) = ١/٦ × ٨ × ٤ × جتا ١٢٠°
= ١٦/٣ × -١/٢ = -٨/٣

③ أب . (√٣ أ ء) = √٣ (أب . أ ء)
= √٣ × ٤ × ٨ × جتا ١٢٠°
= -١٦√٣

④ (٧ ب ء) . أحـ = ٧ × ٤√٧ × ٤√٣ × جتا ى
= ٧ × ١٦ × √٧ × √٣ × √٣/√٧
= ٣٣٦

١٤

أب = √((١٢)² + (١٦)²)
= ٢٠ سم

① أب . (-٢ ء حـ)
= -٢ (أب . ء حـ)
= -٢ × ٢٠ × ٢٠ جتا ٠° = -٨٠٠

② (١/٢ أحـ) . ء ب = ١/٢ [٢٤ × ٣٢ × جتا ٩٠°]
= صفر

③ أ ء . ء ب = ٢٠ × ٣٢ جتا (١٨٠° - هـ)
= -٦٤٠ × جتا هـ = -٦٤٠ × ٤/٥
= -٥١٢

④ ب أ . ب حـ = ٢٠ × ٢٠ جتا ٢ هـ
، جتا ٢ هـ = ٢ جتا² هـ - ١
= ٢ × (٤/٥)² - ١ = ٧/٢٥
∴ ب أ . ب حـ = ٤٠٠ × ٧/٢٥ = ١١٢

١٥

أحـ = √(٢٥ + ١٤٤) = ١٣ سم

① أب . أحـ
= ٥ × ١٣ جتا أ
= ٦٥ × ٥/١٣ = ٢٥

② ب حـ . (١/٢ ب أ) = ١/٢ (ب حـ . ب أ)
= ١/٢ × ١٢ × ٥ × جتا ٩٠° = صفر

③ ب أ . ب ء = ٥ × ٦,٥ جتا هـ
= ٥ × ٦,٥ جتا أ = ٥ × ٦,٥ × ٥/١٣ = ١٢,٥

④ ء ب . (١/٤ ب حـ) = ١/٤ (ء ب . ب حـ)
= ١/٤ × ٦,٥ × ١٢ جتا (١٨٠° - (٩٠° - هـ))
= ٣٩/٢ × جتا (٩٠° + هـ)
= ٣٩/٢ × - جا هـ = ٣٩/٢ × -١٢/١٣ = -١٨

١٦

من الشكل: أب = ء م = √((٢٦)² - (٢٤)²) = ١٠ سم

① حـ ء . حـ ب = ٢٦ × ٤٨ × جتا هـ
= ٢٦ × ٤٨ × ٢٤/٢٦ = ١١٥٢

② ء ب . ب حـ = ٢٦ × ٤٨
× جتا (١٨٠° - ق (∠ ء ب حـ))
= ٢٦ × ٤٨ × - ٢٤/٢٦ = -١١٥٢

③ ء حـ . أب = ٢٦ × ١٠ × جتا هـ
= ٢٦٠ × ١٠/٢٦ = ١٠٠

١٧

① ∵ حـ أ + أو = حـ و
∴ (حـ أ + أو) . أ ء
= حـ و . أ ء
= ١٦ × ١٦ جتا ١٢٠°
= -١٢٨

② (أب - هـ و) . أ ء
= أب . أ ء - هـ و . أ ء
= ٨ × ١٦ جتا ٦٠° - ٨ × ١٦ جتا ١٨٠° = ١٩٢

١٨

① ٢ أحـ . (-٣ ب) = -٦ (أحـ . ب)
= -٦ (-١ + ٢ - ٢) = ٦

∴ أ + ٣/٢ × ٦ أ = ٥ أ = ٢٠ س - ١٥ ص

② ٢ ب + ٣ أحـ = (٢ ، ٤ ، -٢) + (-٣ ، ٣ ، ٦)
= (-١ ، ٧ ، ٤)

= ١/٥ ((-٤) + (-٢١) + ٠) = -٥
∴ ٢ أحـ - (-٥) ب
= (-٢ ، ٢ ، ٤) + ٥ (١ ، ٢ ، -١)
= (-٢ ، ٢ ، ٤) + (٥ ، ١٠ ، -٥)
= (٣ ، ١٢ ، -١)

١٩

∵ ب حـ = حـ - ب = (٢ ، -١ ، ١)
∵ أحـ = حـ - أ = (١ ، -٣ ، -٥)
∴ ب حـ . أحـ = ٢ + ٣ - ٥ = ٠
∴ Δ أ ب حـ قائم في حـ

٢٠

أ + ب = (٤ ، ١ ، -١)
أ - ب = (-٢ ، ٣ ، -٥)
∴ (أ + ب) . (أ - ب) = -٨ + ٣ + ٥ = صفر
∴ المتجه (أ + ب) عمودي على المتجه (أ - ب)

٢١

① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ) ⑨ (ء) ⑩ (ب)
⑪ (ء) ⑫ (ء) ⑬ (ء) ⑭ (جـ) ⑮ (جـ)
⑯ (أ) ⑰ (ب) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)
٢١ (جـ) ٢٢ (ء) ٢٣ (ب) ٢٤ (أ) ٢٥ (ب)
٢٦ (ب) ٢٧ (ء) ٢٨ (ب) ٢٩ (أ) ٣٠ (ب)
٣١ (ب) ٣٢ (أ) ٣٣ (جـ) ٣٤ (ب) ٣٥ (ب)
٣٦ (جـ) ٣٧ (ب) ٣٨ (أ) ٣٩ (أ)
٤٠ أولاً: (أ) ثانياً: (جـ) ٤١ (ء) ٤٢ (جـ)
٤٣ (جـ) ٤٤ (جـ) ٤٥ (أ) ٤٦ (أ)

٢٢

جتا θ = ((ل ، م ، ن) . (ل ، م ، ن)) / (١ × ١)
= ل ل + م م + ن ن

٢٣

∵ أ . ب = أ ب جتا هـ
∴ (٣ ، ٤ ، ٥) . (١ ، ك ، ٥)
= ٥√٢ × √(٢٦ + ك²) × ١/٢
∴ ٣ + ٤ ك + ٢٥ = ٥/٢ √٢ √(٢٦ + ك²)
∴ ٤ ك + ٢٨ = ٥/٢ √٢ √(٢٦ + ك²) (١)
بالتربيع ١٦ ك² + ٢٢٤ ك + ٧٨٤ = ٢٥/٢ (٢٦ + ك²)
(حيث ٤ ك + ٢٨ ≥ ٠ أي أن ك ≥ -٧)
∴ ٧ ك² + ٤٤٨ ك + ٩١٨ = ٠
∴ ك = -٢,١٢ أو -٦١,٨٨ (مرفوض)

٢٤

أ . ب = ٢ جتا² θ + لو٣ س . لو٣ ٢٧ + ٢ جا² θ
= ١١
لو٣ س لو٣ ٢٧ = ٩ لو٣ س = ٩ / لو٣ ٢٧
∴ س = ٣^(٩/لو٣ ٢٧) = ٢١,٠٤

٢٥

ب ء = ء - ب = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ٦)
= (-٤ ، -٨ ، ٠)
حـ أ = أ - حـ = (٠ ، ٨ ، ٦) - (٤ ، ٠ ، ٦)
= (-٤ ، ٨ ، ٠)
ب ء . حـ أ = (-٤ ، -٨ ، ٠) . (-٤ ، ٨ ، ٠)
= ١٦ - ٦٤ + ٠ = -٤٨

٢٦

∵ أ . ب = ‖أ‖ ‖ب‖ جتا θ
∴ ١/٢ = ‖أ‖² × جتا ٦٠°
∴ ‖أ‖² = ١ ∴ ‖أ‖ = ١

٢٧

أب = ب - أ = (١ ، ٤ ، -١) ، ‖أب‖ = ٣√٢
حـ ء = ء - حـ = (-٢ ، -٨ ، ٢)
، ‖حـ ء‖ = ٦√٢
جتا θ = (أب . حـ ء) / (‖أب‖ ‖حـ ء‖) = (-٢ - ٣٢ - ٢) / (٣√٢ × ٦√٢) = -١
θ = ١٨٠°

حل آخر: ∵ حـ ء = -٢ أب
∴ حـ ء في الاتجاه المضاد للمتجه أب
∴ قياس الزاوية بينهما = ١٨٠°

٢٨

∵ جتا θ = ((ك ، ٣ ك ، ١) . (٧ ، -٢ ، ١)) / (√(ك² + ٩ ك² + ١) √(٤٩ + ٤ + ١))
= (٧ ك - ٦ ك + ١) / (√(١٠ ك² + ١) √٥٤)
، ∵ θ منفرجة ∴ جتا θ سالبة
∴ ٧ ك - ٦ ك + ١ < ٠ ∴ ك + ١ < ٠
∴ ك < -١ ∴ ك ∈]-∞ ، -١[

٢٩

(أ + ب) . (أ - ب)
= |أ|² - أ . ب + ب . أ - |ب|²
= |أ|² - |ب|² = ٨
∴ ٩ |ب|² - |ب|² = ٨
∴ |ب| = ١ منها |أ| = ٣

٣٠

أ + ك ب = (٢ - ك ، ٢ + ٢ ك ، ٣ + ك)
حـ = (٣ ، ١ ، ٠)
في حالة أن المتجه (أ + ك ب) يكون عمودياً على المتجه حـ
∴ ٣ (٢ - ك) + ١ (٢ + ٢ ك) + ٠ = ٠
∴ ٦ - ٣ ك + ٢ + ٢ ك = ٠ ∴ ك = ٨

٣١

من Δ ء ب حـ
حـ ء = √(٢² + ٦² - ٢ × ٢ × ٦ × جتا ٦٠°)
= ٢√٧ سم.
∴ حـ ء . حـ ب = حـ ء × حـ ب × جتا (∠ ء حـ ب)
= ٢√٧ × ٦ × (٦² + (٢√٧)² - ٢²) / (٢ × ٦ × ٢√٧) = ٣٠

حل آخر:
حـ ء . حـ ب = (حـ أ + أ ء) . حـ ب
= حـ أ . حـ ب + أ ء . حـ ب
= ٦ × ٦ جتا ٦٠° + ٤ × ٦ جتا ٦٠° = ٣٠

٣٢

∵ جا (∠ أ و ب) = ٢٤/٢٥
، أب > و حـ
∴ ∠ أ و ب منفرجة
∴ جتا (∠ أ و ب) = -٧/٢٥
∴ و حـ = و أ + و ب = أ + ب
∴ |و حـ|² = (أ + ب) . (أ + ب)
= |أ|² + |ب|² + ٢ (أ . ب)
= ١ + ١ + ٢ × ١ × ١ × -٧/٢٥ = ٣٦/٢٥
∴ |و حـ| = ٦/٥ = ١,٢ وحدة طول
، ∵ ب أ = أ - ب
∴ |ب أ|² = (أ - ب) . (أ - ب)
= |أ|² + |ب|² - ٢ (أ . ب)
= ١ + ١ - ٢ × ١ × ١ × -٧/٢٥ = ٦٤/٢٥
∴ |ب أ| = ٨/٥ = ١,٦ وحدة طول

٣٣

① أ . ب = ‖أ‖ ‖ب‖ جتا هـ
= ٣٠ × ٤٠ × جتا ٦٠°
= ٦٠٠

② ‖أ + ب‖² = ‖أ‖² + ‖ب‖² + ٢ (أ . ب)
= ٩٠٠ + ١٦٠٠ + ٢ × ٦٠٠
= ٣٧٠٠
‖أ + ب‖ = √٣٧٠٠ = ١٠ √٣٧

③ مركبة (أ + ب) فى اتجاه أ
= (أ + ب) . أ / ‖أ‖ = (‖أ‖² + ب . أ) / ‖أ‖
= ((٣٠)² + ٦٠٠) / ٣٠ = ٥٠

٣٤

① ∴ أب = (−٢ ، ٤ ، −٢) ، ‖أب‖ = ٢ √٦
بحـ = (−١ ، ١ ، −٢) ، ‖بحـ‖ = √٦
، أحـ = (−٣ ، ٥ ، −٤) ، ‖أحـ‖ = ٥ √٢
، ∵ ق(∠أ) = جتا⁻¹ (أب . أحـ / ‖أب‖ ‖أحـ‖)
∴ ق(∠أ) = جتا⁻¹ ((٦ + ٢٠ + ٨) / ٢٠ √٣) ≃ ٢٢ ٣ ١١°
، ∵ ق(∠ب) = جتا⁻¹ (بأ . بحـ / ‖بأ‖ ‖بحـ‖)
∴ ق(∠ب) = جتا⁻¹ ((−٢ − ٤ − ٤) / ١٢)
≃ ٣٤ ٢٦ ١٤٦°
، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٢٢ ٣ ١١° + ٣٤ ٢٦ ١٤٦°)
= ٤ ٣١ ٢٢°

② أب = (−٣ ، ١٢ ، ٥) ، ‖أب‖ = √١٧٨
بحـ = (٥ ، ١ ، −٩) ، ‖بحـ‖ = √١٠٧
، أحـ = (٢ ، ١٣ ، −٤) ، ‖أحـ‖ = ٣ √٢١
، ∵ ق(∠أ) = جتا⁻¹ (أب . أحـ / ‖أب‖ ‖أحـ‖)
∴ ق(∠أ) = جتا⁻¹ ((−٦ + ١٥٦ − ٢٠) / (√١٧٨ × ٣ √٢١))
≃ ٥٦ ٥١ ٤٤°
، ∵ ق(∠ب) = جتا⁻¹ (بأ . بحـ / ‖بأ‖ ‖بحـ‖)
∴ ق(∠ب) = جتا⁻¹ ((١٥ − ١٢ + ٤٥) / (√١٧٨ √١٠٧))
≃ ٤٨ ٣٨ ٦٩°
، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٦ ٥١ ٤٤° + ٤٨ ٣٨ ٦٩°)
= ١٦ ٢٩ ٦٥°

③ أب = (−٢ ، −٢ ، −٢) ، ‖أب‖ = √١٧
، بحـ = (١ ، ١ ، ٢) ، ‖بحـ‖ = √٦
، أحـ = (−١ ، −١ ، −١) ، ‖أحـ‖ = √٣
، ∵ ق(∠أ) = جتا⁻¹ (أب . أحـ / ‖أب‖ ‖أحـ‖)
∴ ق(∠أ) = جتا⁻¹ ((٢ + ٢ + ٢) / (√١٧ √٣)) ≃ ١٨ ٢٥ ١١°
، ∵ ق(∠ب) = جتا⁻¹ (بحـ . بأ / ‖بحـ‖ ‖بأ‖)
∴ ق(∠ب) = جتا⁻¹ ((٢ + ٢ + ٦) / (√١٧ √٦)) ≃ ٥٨ ٢ ٨°
ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٨ ٢٥ ١١° + ٥٨ ٢ ٨°)
= ٤٤ ٣١ ١٦٠°

٣٥

مركبة بء فى اتجاه بحـ
= ‖بء‖ جتا (∠ءبحـ)
= ٥٠ × ٣٠ / ٥٠ = ٣٠
مركبة بء فى اتجاه ءحـ
= −‖بء‖ جتا (∠بءحـ) = −٥٠ × ٤٠ / ٥٠ = −٤٠

٣٦

بء . بأ
= ‖بء‖ ‖بأ‖ جتا (∠ءبأ)
= ١٠ √٢ × ١٠ × جتا ٤٥°
= ١٠٠
مسقط بء فى اتجاه حـب
= −‖بء‖ جتا (∠ءبحـ)
= −١٠ √٢ × جتا ٤٥° = −١٠

٣٧

مركبة حـء فى اتجاه حـب
= ‖حـء‖ جتا (∠بحـء)
= ٦ √٢ × ١ / √٢ = ٦
مركبة حـء فى اتجاه أء = ‖حـء‖ جتا ∠حـءأ
= ٦ √٢ × −١ / √٢ = −٦
مركبة حـء فى اتجاه أب = −‖حـء‖ جتا ٤٥°
= −٦ √٢ × ١ / √٢ = −٦

٣٨

(أ + ب + حـ) . (أ + ب + حـ) = و . و
∴ ‖أ‖² + أ . ب + أ . حـ + ب . أ + ‖ب‖²
+ ب . حـ + حـ . أ + حـ . ب + ‖حـ‖² = ٠
∴ ٢ أ . ب + ٢ أ . حـ + ٢ ب . حـ + ٣ = ٠
∴ أ . ب + أ . حـ + ب . حـ = −٣ / ٢

٣٩

∵ أ + ب = −٢ حـ
∴ (أ + ب) . (أ + ب) = (−٢ حـ) . (−٢ حـ)
∴ ‖أ‖² + ‖ب‖² + ٢ (أ . ب) = ٤ ‖حـ‖²
∴ ١ + ١٦ + ٢ (أ . ب) = ١٦
∴ أ . ب = −١ / ٢
وبالمثل : أ + ٢ حـ = −ب
∴ (أ + ٢ حـ) . (أ + ٢ حـ) = (−ب) . (−ب)
∴ ‖أ‖² + ٤ ‖حـ‖² + ٤ (أ . حـ) = ‖ب‖²
∴ ١ + ١٦ + ٤ (أ . حـ) = ١٦
∴ أ . حـ = −١ / ٤
وبالمثل : ب + ٢ حـ = −أ
∴ (ب + ٢ حـ) . (ب + ٢ حـ) = (−أ) . (−أ)
∴ ‖ب‖² + ٤ ‖حـ‖² + ٤ (ب . حـ) = ‖أ‖²
∴ ١٦ + ١٦ + ٤ (ب . حـ) = ١
∴ ب . حـ = −٣١ / ٤
∴ م = −١ / ٢ − ١ / ٤ − ٣١ / ٤ = −١٧ / ٢

٤٠

∵ أ + ب + حـ = و
∴ (أ + ب + حـ) . ب = و . ب
∴ أ . ب + ‖ب‖² + حـ . ب = صفر
أ . ب + ٢٥ + حـ . ب = ٠ (١)
∵ أ + ب + حـ = و
∴ (أ + ب + حـ) . حـ = و . حـ
أ . حـ + ب . حـ + ‖حـ‖² = ٠
أ . حـ + ب . حـ + ٤٩ = ٠ (٢)
∵ أ + ب + حـ = و
∴ (أ + ب + حـ) . أ = و . أ
‖أ‖² + ب . أ + حـ . أ = ٠
٩ + ب . أ + حـ . أ = ٠ (٣)
بجمع (١) ، (٣) وبطرح منهم (٢)
٢ أ . ب + ٢٥ + ٩ − ٤٩ = ٠

، $\overrightarrow{حـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (٢ ، ٠ ، ٠) - (٠ ، ٢ ، ٠)$

$= (٢ ، -٢ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{حـ أ} = ٠ + ٤ + ٠ = ٤$

، $\|\overrightarrow{حـ ء}\| = ٢\sqrt{٢}$ ، $\|\overrightarrow{حـ أ}\| = ٢\sqrt{٢}$

∴ θ = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٢\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢}}\right)$ = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٦٠°

حل آخر: ∵ الشكل مكعب

، حـ ء = ء أ = أ حـ ∴ Δ أ حـ ء متساوى الأضلاع

∴ θ = ٦٠°

٤٩

إحداثيات النقطة أ (٠ ، ٣ ، ٢)

إحداثيات النقطة ب (٢ ، ٠ ، ٨)

إحداثيات النقطة حـ (٢ ، ٠ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{أ ب}$ = (-٢ ، ٣ ، -٦) ، $\overrightarrow{ب حـ}$ = (٠ ، ٠ ، -٤)

جتا θ = $\frac{(-٢ ، ٣ ، -٦) \cdot (٠ ، ٠ ، -٤)}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}\sqrt{(-٤)^{٢}}} = \frac{٢٤}{٢٨} = \frac{٦}{٧}$

∴ θ = ٣١°

٥٠

إحداثيات النقطة أ (٠ ، ٦ ، ٧)

، إحداثيات النقطة ب (٥ ، ٢ ، ٥)

، إحداثيات النقطة حـ (٥ ، ١٠ ، ٥)

∴ $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٥ ، -٤ ، -٢)

، $\overrightarrow{أ حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ٤ ، -٢)

∴ جتا θ = $\frac{(٥ ، -٤ ، -٢) \cdot (٥ ، ٤ ، -٢)}{\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}} = \frac{١٣}{٤٥}$

∴ θ = ٧٣ ١٣°

٥١

$\overrightarrow{و أ}$ = (٢ ، ٢ ، ٢)

$\overrightarrow{حـ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}$ = (٠ ، ٠ ، ٢) - (٢ ، ٢ ، ٠)

= (-٢ ، -٢ ، ٢)

∴ $\frac{\overrightarrow{و أ} \cdot \overrightarrow{حـ ب}}{\|\overrightarrow{حـ ب}\|} = \frac{-٤ - ٤ + ٤}{\sqrt{١٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

٥٢

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$)

$\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢ ، ٢$\sqrt{٣}$) ، $\|\overrightarrow{م}\|$ = ٥

المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{أ ب}$ فى اتجاه $\overrightarrow{م}$

= $\frac{\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|^{٢}}\overrightarrow{م} = \frac{٣ + ٠ + ٦}{٢٥}$ (٣ ، ٢ ، ٢$\sqrt{٣}$)

= $\frac{٩}{٢٥}$ (٣ ، ٢ ، ٢$\sqrt{٣}$)

= $\left(\frac{٢٧}{٢٥} ، \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$

٥٣

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٥ ، -٢)

الشغل = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{أ ب}$ = (٤ ، -٦ ، ١٠) . (١ ، ٥ ، -٢)

= ٤ - ٣٠ - ٢٠ = -٤٦

٥٤

$\overrightarrow{أ ب}$ = (٥ ، -١ ، -٢)

الشغل = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{أ ب}$ = (١ ، -٢ ، ٣) . (٥ ، -١ ، -٢)

= ٥ + ٢ - ٦ = ١ جول.

٥٥

① ٥٠ × ١٥ × جتا ١٨٠° = -٧٥٠ جول.

② ٥٠ × ١٥ × جتا ٠° = ٧٥٠ جول.

٥٦

الشغل = ق × ف × جتا θ

= ١٦٠ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٦٤٠ جول.

٥٧

∵ $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٠ ، ٠ ، ٥) - (٣ ، ٧ ، ٠)

= (-٣ ، -٧ ، ٥)

∴ $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{٨٣}$

∴ الشغل = $\|\overrightarrow{ق}\| \|\overrightarrow{أ ب}\|$ جتا ٣٠°

= ٢٠٠ × $\sqrt{٨٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٥٧٨ جول.

٥٨

∵ $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ١٢ ، ٠) - (٩ ، ٠ ، ٢٠)

= (-٩ ، ١٢ ، -٢٠)

∴ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ب حـ}$

= $\frac{(-٩ ، ١٢ ، -٢٠)}{\sqrt{(-٩)^{٢} + (١٢)^{٢} + (-٢٠)^{٢}}}$

= $\left(\frac{-٩}{٢٥} ، \frac{١٢}{٢٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$

∴ قوة الشد فى اتجاه $\overrightarrow{ب حـ}$

= ٥٠ $\left(\frac{-٩}{٢٥} ، \frac{١٢}{٢٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$ = (-١٨ ، ٢٤ ، -٤٠)

، $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٩ ، ٠ ، ٢٠) - (٩ ، ٠ ، ١٢)

= (٠ ، ٠ ، ٨)

∴ الشغل المبذول من قوة الشد فى اتجاه $\overrightarrow{ب حـ}$

لرفع الجسم من أ إلى ب

= (-١٨ ، ٢٤ ، -٤٠) . (٠ ، ٠ ، ٨)

= -٣٢٠ جول.

٥٩

① (حـ) ② (ب) ③ (حـ) ④ (حـ) ⑤ (حـ)

⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (ب) ⑨ (د)

إرشادات لحل رقم **٥٩** :

① ∵ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}\|^{٢} = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) \cdot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ})$

$= \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

$+ \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ}$

$+ \overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{حـ}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + \|\overrightarrow{حـ}\|^{٢} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

$+ ٢\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ}$

، ∵ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متعامدة مثنى مثنى

فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ}$ = صفر

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}\|^{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + \|\overrightarrow{حـ}\|^{٢}$

= (٢)^{٢} + (٣)^{٢} + (١٢)^{٢} = ١٥٧

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}\| = \sqrt{١٥٧}$

② ∵ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢}$ = ٣

∴ $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ = ٣

∴ $\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٣

، ∵ $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ = ١

∴ ٢$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٣ - ١ - ١ = ١

∴ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \frac{١}{٢}$

∴ $(٣\overrightarrow{أ} - ٤\overrightarrow{ب}) \cdot (٢\overrightarrow{أ} + ٥\overrightarrow{ب}) = ٦\|\overrightarrow{أ}\|^{٢}$

$+ ١٥\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} - ٨\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} - ٢٠\|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

$= ٦\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + ٧\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} - ٢٠\|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

= ٦ × ١ + ٧ × $\frac{١}{٢}$ - ٢٠ × ١ = $\frac{-٢١}{٢}$

③ ∵ $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|^{٢}$ = ٩٠٠

∴ $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$ = ٩٠٠

∴ $\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} - ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٩٠٠

∴ ١٢١ + ٥٢٩ - ٢$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٩٠٠

∴ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = -١٢٥

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢} = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + ٢(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}) + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

= ١٢١ - ٢٥٠ + ٥٢٩ = ٤٠٠

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$ = ٢٠

④ ∵ $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|^{٢} = (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} - ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} - ٢\|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

= ١ + ١ - ٢ × ١ × ١ جتا θ

= ٢ - ٢ جتا θ

، ∵ جتا θ ∈ [-١ ، ١]

∴ -٢ جتا θ ∈ [-٢ ، ٢]

∴ ٢ - ٢ جتا θ ∈ [٠ ، ٤]

∴ $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|^{٢}$ ∈ [٠ ، ٤]

⑤ ∵ ب ء = ب حـ $\sqrt{٢}$ = ١٦ سم

∴ ء م = ٨ سم

∴ هـ م = $\sqrt{(١٠)^{٢} - (٨)^{٢}}$

= ٦ سم

∴ أ هـ = ٨ - ٦ = ٢ سم

∴ $\overrightarrow{حـ ب} \cdot \overrightarrow{أ هـ} = \|\overrightarrow{حـ ب}\| . \|\overrightarrow{أ هـ}\|$ جتا ١٣٥°

= ٨$\sqrt{٢}$ × ٢ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = -١٦

⑥ ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى :

$\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٩}$ = ١

∴ أ = (١٢ ، ٠)

، ب = (٠ ، ٩)

، ∵ حـ تقسم $\overline{ب أ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

∴ حـ = $\left(\frac{١ × ١٢ + ٢ × ٠}{١ + ٢} ، \frac{١ × ٠ + ٢ × ٩}{١ + ٢}\right)$

= (٤ ، ٦)

∴ $\overrightarrow{و حـ} \cdot \overrightarrow{حـ أ}$ = (-٤ ، -٦) . (٨ ، -٦) = ٤

⑦ ∵ ح = (ل ، ل ، ل)

، ب = (ل ، ل ، ٠) ، حـ = (ل ، ٠ ، ٠)

، ء = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ $\overrightarrow{حـ ء}$ = (-ل ، ٠ ، ل)

∵ $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب}$ = -٣٢

∴ -ل^{٢} - ل^{٢} = -٣٢ ∴ -٢ ل^{٢} = -٣٢

∴ ل^{٢} = ١٦ ∴ ل = ٤ وحدة طولية

∴ المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{٢} = ٦ × (٤)^{٢}

= ٩٦ وحدة مربعة.

⑧ ∵ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

= ٢ + ٢ جتا θ = ٢ (١ + جتا θ)

= ٢ (١ + ٢ جتا^{٢} $\frac{θ}{٢}$ - ١) = ٤ جتا^{٢} $\frac{θ}{٢}$

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$ = ٢ جتا $\frac{θ}{٢}$

∴ جتا $\frac{θ}{٢} = \frac{١}{٢}\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

⑨ ∵ أ ب حـ ء معين ∴ س و = ء ص = ٤ سم

∴ ء هـ = هـ ص = ٢ سم

، ∵ Δ ء هـ و قائم الزاوية فى و

∴ ء و = $\sqrt{(٢)^{٢} - (١)^{٢}} = \sqrt{٣}$ سم

، ∵ و هـ ص حـ رباعى دائرى

∴ ء هـ × ء ص = ء و × ء حـ

∴ ٢ × ٤ = $\sqrt{٣}$ × ء حـ ∴ ء حـ = $\frac{٨}{\sqrt{٣}}$ سم

∴ $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب} = \frac{٨}{\sqrt{٣}} \times \frac{٨}{\sqrt{٣}}$ × جتا (∠ حـ)

، ∵ جتا حـ = جتا (∠ ء هـ و) = $\frac{١}{٢}$

∴ $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب} = \frac{٨}{\sqrt{٣}} \times \frac{٨}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣٢}{٣}$

٦٠

∵ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ هو $\overrightarrow{ى_١} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

= $\left(\frac{٦}{٧} ، \frac{٣}{٧} ، \frac{٢}{٧}\right)$

، متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ هو $\overrightarrow{ى_٢} = \frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}$

= $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

∴ $\overrightarrow{ى_١} + \overrightarrow{ى_٢}$ يمثل متجه ينصف الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{حـ}$ = هـ ($\overrightarrow{ى_١} + \overrightarrow{ى_٢}$)

= هـ $\left(\frac{٦}{٧} + \frac{١}{٣} ، \frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٧} + \frac{٢}{٣}\right)$

= هـ $\left(\frac{٢٥}{٢١} ، \frac{٢٣}{٢١} ، \frac{٢٠}{٢١}\right)$

، ∵ $\|\overrightarrow{حـ}\| = ٣\sqrt{٤٢}$

∴ $\frac{هـ}{٢١}\sqrt{(٢٥)^{٢} + (٢٣)^{٢} + (٢٠)^{٢}} = ٣\sqrt{٤٢}$

∴ هـ = ٦٣ ∴ $\overrightarrow{حـ}$ = (٧٥ ، ٦٩ ، ٦٠)

٦١

∵ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢} = (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + ٢\|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

① الشرط اللازم لكى يكون $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

$= \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ هو وضع θ = صفر

أى أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ لهما نفس الاتجاه،

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢} + ٢\|\overrightarrow{أ}\|.\|\overrightarrow{ب}\|$

$= (\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|)^{٢}$

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

② الشرط اللازم لكى يكون $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$ هو وضع $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر

، ∵ $\overrightarrow{أ} \neq \overrightarrow{ب} \neq \overrightarrow{و}$ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

أى أن θ = ٩٠°

٦٢

∵ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|^{٢} = \|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|^{٢}$

∴ $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

∴ $\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} + ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} - ٢\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

∴ ٤$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٠ ∴ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٠ ∴ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

إجابات تمارين ٤

١

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|$ جا θ = ٨ × ٥ × جا ١٢٠°

= ٢٠$\sqrt{٣}$

٢

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|$ جا θ ($\pm\overrightarrow{ى}$)

= ± ٥ × ٨,٥ جا ٣٠° $\overrightarrow{ى}$ = ± ٢١,٢٥ $\overrightarrow{ى}$

٣

∵ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|\|\overrightarrow{ب}\|$ جا θ

∴ ٦٥ = ٥ × ٢٦ × جا θ

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠° أو ١٥٠°

٤

① $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$

= (-١٢ - ٢) $\overrightarrow{س}$ - (٨ - ١) $\overrightarrow{ص}$ + (-٦ - ٣) $\overrightarrow{ع}$

= -١٤ $\overrightarrow{س}$ - ٧ $\overrightarrow{ص}$ - ٩ $\overrightarrow{ع}$

② $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٤ & -١ & ٢ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

= (٢ - ٠) $\overrightarrow{س}$ - (-٨ - ٢) $\overrightarrow{ص}$ + (٠ + ١) $\overrightarrow{ع}$

= ٢ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$

③ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٥ & -٤ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$

= (١٢ - ١) $\overrightarrow{س}$ - (-١٥ - ٢) $\overrightarrow{ص}$ + (٥ + ٨) $\overrightarrow{ع}$

= ١١ $\overrightarrow{س}$ + ١٧ $\overrightarrow{ص}$ + ١٣ $\overrightarrow{ع}$

④ أ × ب =

س	ص	ع
−١	−٢	٠
٠	٣	−٥

= (١٠ + ٠) س − (٠ − ٥) ص + (−٣ − ٠) ع
= ١٠ س − ٥ ص − ٣ ع

٥

① أ × ب =

س	ص	ع
١	١	−٢
٣	−٢	٥

= (٥ − ٤) س − (٥ + ٦) ص + (−٢ − ٣) ع
= س − ١١ ص − ٥ ع
② ٢ أ × ٣ ب = ٦ (أ × ب)
= ٦ (س − ١١ ص − ٥ ع)
= ٦ س − ٦٦ ص − ٣٠ ع
③ أ × (أ − ٢ ب) = أ × أ − ٢ أ × ب
= و − ٢ (س − ١١ ص − ٥ ع)
= −٢ س + ٢٢ ص + ١٠ ع

٦

ب × أ =

س	ص	ع
١	٠	−٢
٤	٣	١

= (٠ + ٦) س − (١ + ٨) ص + (٣ − ٠) ع
= ٦ س − ٩ ص + ٣ ع
∴ ‖٢ ب × أ‖ = ٢ × ‖ب × أ‖
= ٢ × $3\sqrt{14}$ = $6\sqrt{14}$

٧

أ × ب =

س	ص	ع
٣	−٤	٥
١	−١	١

= (−٤ + ٥) س − (٣ − ٥) ص + (−٣ + ٤) ع
= س + ٢ ص + ع
‖أ‖ = $5\sqrt{2}$ ‖ب‖ = $\sqrt{3}$
، ‖أ × ب‖ = $\sqrt{6}$
∴ جا θ = $\frac{\|أ \times ب\|}{\|أ\|\,\|ب\|} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{5}$

٨

① أ × ب =

س	ص	ع
٢	٣	٠
−١	٣	١

= (٣ − ٠) س − (٢ − ٠) ص + (٦ + ٣) ع
= ٣ س − ٢ ص + ٩ ع
② حـ × حـ = و
③ (أ − ب) × (حـ − أ)
= (٣ ، ٠ ، −١) × (−١ ، −١ ، ٥)
=

س	ص	ع
٣	٠	−١
−١	−١	٥

= (٠ − ١) س − (١٥ − ١) ص + (−٣ − ٠) ع
= − س − ١٤ ص − ٣ ع

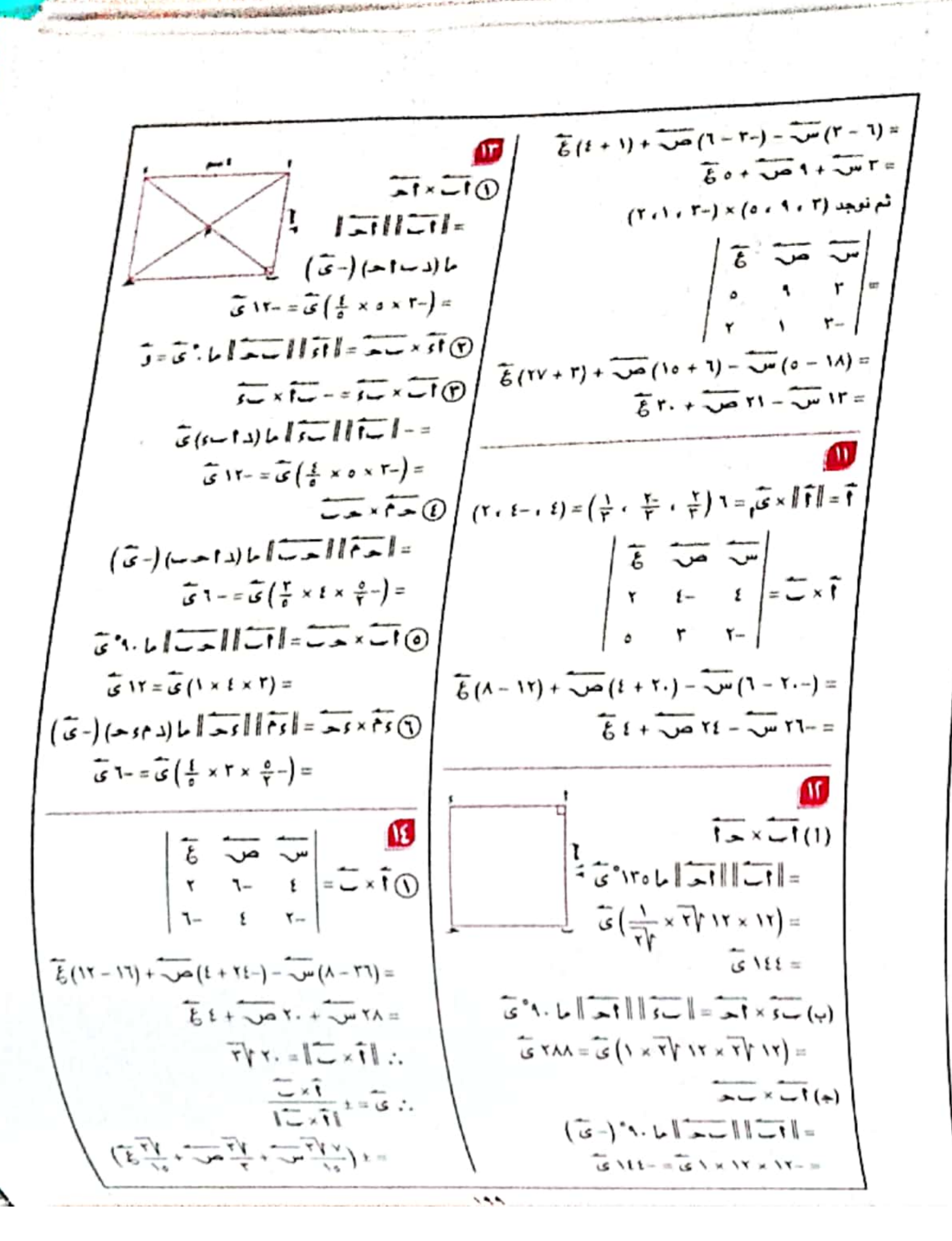
٩

(١) (أ)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)	(٥) (ب)
(٦) (ب)	(٧) (ب)	(٨) (جـ)	(٩) (د)	(١٠) (ب)
(١١) (ب)	(١٢) (د)	(١٣) (د)	(١٤) (ب)	(١٥) (جـ)
(١٦) (جـ)	(١٧) (جـ)	(١٨) (جـ)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)

١٠

أولًا نوجد : (١ ، −٢ ، ٣) × (٢ ، ١ ، −٣)
=

س	ص	ع
١	−٢	٣
٢	١	−٣



= (٦ − ٣) س − (−٣ − ٦) ص + (١ + ٤) ع
= ٣ س + ٩ ص + ٥ ع
ثم نوجد (−٣ ، ١ ، ٢) × (٣ ، ٩ ، ٥)
=

س	ص	ع
٣	٩	٥
−٣	١	٢

= (١٨ − ٥) س − (٦ + ١٥) ص + (٣ + ٢٧) ع
= ١٣ س − ٢١ ص + ٣٠ ع

١١

أ = ‖أ‖ × ى_أ = ٦ ($\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$) = (٤ ، −٤ ، ٢)

أ × ب =

س	ص	ع
٤	−٤	٢
−٢	٣	٥

= (−٢٠ − ٦) س − (٢٠ + ٤) ص + (١٢ − ٨) ع
= −٢٦ س − ٢٤ ص + ٤ ع

١٢

(أ) أ ب × أ حـ
= ‖أ ب‖ ‖أ حـ‖ جا ١٣٥° ى
= (١٢ × $12\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$) ى
= ١٤٤ ى
(ب) ب د × أ حـ = ‖ب د‖ ‖أ حـ‖ جا ٩٠° ى
= (١٢ $\sqrt{2}$ × ١٢ $\sqrt{2}$ × ١) ى = ٢٨٨ ى
(جـ) أ ب × ب حـ
= ‖أ ب‖ ‖ب حـ‖ جا ٩٠° (−ى)
= −١٢ × ١٢ × ١ ى = −١٤٤ ى

١٣

① أ ب × أ حـ
= ‖أ ب‖ ‖أ حـ‖ جا (د ب أ حـ) (−ى)
= (−٣ × ٥ × $\frac{4}{5}$) ى = −١٢ ى
② أ د × ب حـ = ‖أ د‖ ‖ب حـ‖ جا ٠° ى = و
③ أ ب × حـ د = − ب أ × حـ د
= − ‖ب أ‖ ‖حـ د‖ جا (د ب أ حـ) ى
= (−٣ × ٥ × $\frac{4}{5}$) ى = −١٢ ى
④ حـ أ × حـ ب
= ‖حـ أ‖ ‖حـ ب‖ جا (د أ حـ ب) (−ى)
= (−$\frac{5}{2}$ × ٤ × $\frac{3}{5}$) ى = −٦ ى
⑤ أ ب × ب حـ = ‖أ ب‖ ‖ب حـ‖ جا ٩٠° ى
= (٣ × ٤ × ١) ى = ١٢ ى
⑥ م د × م حـ = ‖م د‖ ‖م حـ‖ جا (د د م حـ) (−ى)
= (−$\frac{5}{2}$ × ٣ × $\frac{4}{5}$) ى = −٦ ى

١٤

① أ × ب =

س	ص	ع
٤	−٦	٢
−٢	٤	−٦

= (٣٦ − ٨) س − (−٢٤ + ٤) ص + (١٦ − ١٢) ع
= ٢٨ س + ٢٠ ص + ٤ ع
∴ ‖أ × ب‖ = ٢٠ $\sqrt{3}$
∴ ى = ± $\frac{أ \times ب}{\|أ \times ب\|}$
= ± ($\frac{7\sqrt{3}}{15}$ س + $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ص + $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ع)

٢٢

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$

$= -٩\,\vec{س} + ٢\,\vec{ص} - ١٠\,\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع

$= \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ٢\sqrt{٣٥}$ وحدة مساحة.

٢٣

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$

$= -٨\,\vec{س} + ١٢\,\vec{ص} + ٦\,\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع

$= \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ٢\sqrt{٦١}$ وحدة مساحة.

٢٤

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{vmatrix}$

$= -٢\,\vec{س} - ١٤\,\vec{ص} - ١٠\,\vec{ع}$

∴ مساحة $\Delta = \frac{١}{٢}\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ٥\sqrt{٣}$ وحدة مساحة.

٢٥

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$

$= ١٨\,\vec{س} + \vec{ص} + ٥\,\vec{ع}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \frac{٥}{٢}\sqrt{١٤}$ وحدة مساحة.

٢٦

(١) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (٠ ، ٢ ، ٣) \cdot (٣ ، ٠ ، -٤) \ne$ صفر

∴ المتجهان غير متعامدين.

، ∵ $\frac{صفر}{٣} \ne \frac{٢}{صفر} \ne \frac{٣}{-٤}$

∴ المتجهان غير متوازيين.

(٢) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (-٢ ، ١ ، -٢) \cdot (٨ ، -٤ ، ٨) \ne$ صفر

∴ المتجهان غير متعامدين.

، ∵ $\frac{-٢}{٨} = \frac{١}{-٤} = \frac{-٢}{٨}$

∴ المتجهان متوازيان.

٢٧

$\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٢ ، -١٤ ، ٢)$

$\overrightarrow{أحـ} = \vec{حـ} - \vec{أ} = (-٢ ، ١٤ ، -٢)$

∵ $\frac{٢}{-٢} = \frac{-١٤}{١٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$

∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

حل آخر :

$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} = \vec{و}$ ∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٢٨

∵ $\vec{أ} \,/\!/\, \vec{ب}$ ∴ $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

$\frac{١}{ك} = \frac{٦}{٢} = \frac{٢}{م}$ ∴ $ك = \frac{١}{٣}$ ، $م = ١$

∴ $\vec{حـ} = (\frac{١}{٣} ، ١ ، \frac{٢}{٣})$

∴ $\|\vec{حـ}\| = \sqrt{(\frac{١}{٣})^٢ + ١^٢ + (\frac{٢}{٣})^٢} = \frac{\sqrt{١٤}}{٣}$

٢٩

(١) $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ م & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

$= (٤ - ٣م)\,\vec{ع} = -٥\,\vec{ع}$

∴ $٤ - ٣م = -٥$ ∴ $م = ٣$

(٢) $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ عندما $\vec{أ} \cdot \vec{ب} =$ صفر

∴ $(٢ ، ٣ ، ٠) \cdot (م ، ٢ ، ٠) = ٠$

∴ $٢م + ٦ = ٠$ ∴ $م = -٣$

(٣) $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \vec{أ} \cdot \vec{ب}$

$\|(٤ - ٣م)\,\vec{ع}\| = ٢م + ٦$

$|٤ - ٣م| = ٢م + ٦$ ∴ $|٣م - ٤| = ٢م + ٦$

عند $م \ge \frac{٤}{٣}$ ∴ $٣م - ٤ = ٢م + ٦$

∴ $م = ١٠$

عند $م < \frac{٤}{٣}$ ∴ $-٣م + ٤ = ٢م + ٦$

∴ $م = -\frac{٢}{٥}$

٣٠

$\|\vec{أ}\| = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

$\vec{ى}_أ = \frac{(٢ ، -٣)}{\sqrt{١٣}} = \frac{١}{\sqrt{١٣}}(٢ ، -٣)$ ، ∵ $\vec{ب} \,/\!/\, \vec{أ}$

∴ $\vec{ب} = \|\vec{ب}\| \times \pm \vec{ى}_أ$

$= \pm ٣\sqrt{١٣} \times \frac{١}{\sqrt{١٣}}(٢ ، -٣) = \pm(٦ ، -٩)$

٣١

(١) $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٣ ، ٢ ، ٣)$

$\overrightarrow{بحـ} = \vec{حـ} - \vec{ب} = (-٢ ، ٢ ، ٠)$

$\overrightarrow{دحـ} = \vec{حـ} - \vec{د} = (٣ ، ٢ ، ٣)$

$\overrightarrow{أد} = \vec{د} - \vec{أ} = (-٢ ، ٢ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دحـ}$ ، $\overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أد}$

∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع

$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

$= -٦\,\vec{س} - ٦\,\vec{ص} + ١٠\,\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= \|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد}\|$

$= \sqrt{(-٦)^٢ + (-٦)^٢ + (١٠)^٢}$

$= ٢\sqrt{٤٣}$ وحدة مساحة

(٢) متجه الوحدة العمودي على مستوى المتوازي الأضلاع

$= \pm\frac{\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد}}{\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد}\|} = \pm(\frac{-٦}{٢\sqrt{٤٣}} ، \frac{-٦}{٢\sqrt{٤٣}} ، \frac{١٠}{٢\sqrt{٤٣}})$

$= \pm(\frac{-٣}{\sqrt{٤٣}} ، \frac{-٣}{\sqrt{٤٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٤٣}})$

٣٢

(١) (ب)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)	(٥) (ب)
(٦) (د)	(٧) (حـ)	(٨) (حـ)	(٩) (د)	(١٠) (د)
(١١) (حـ)	(١٢) (حـ)	(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (أ)
(١٦) (ب)	(١٧) (حـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (حـ)	(٢٠) (حـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (د)	(٢٣) (د)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (حـ)
(٢٦) (ب)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (أ)	(٢٩) (د)	(٣٠) (حـ)
(٣١) (ب)	(٣٢) (د)	(٣٣) (حـ)		

٣٣

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٩$

٣٤

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠$

٣٥

(١) $\vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = -٦\,\vec{ص} - ٦\,\vec{ع}$

$\vec{أ} \times (\vec{ب} \times \vec{حـ}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & -٤ & ١ \\ ٠ & -٦ & -٦ \end{vmatrix}$

$= ٣٠\,\vec{س} + ١٢\,\vec{ص} - ١٢\,\vec{ع}$

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & -٤ & ١ \\ ١ & ٢ & -٢ \end{vmatrix}$

$= ٦\,\vec{س} + ٥\,\vec{ص} + ٨\,\vec{ع}$

$(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٦ & ٥ & ٨ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٢٤\,\vec{ص} - ١٥\,\vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \times (\vec{ب} \times \vec{حـ}) \ne (\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ}$

(٢) ∵ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} = ٢٤\,\vec{ص} - ١٥\,\vec{ع}$

$(\vec{ب} \times \vec{أ}) = (-٦ ، -٥ ، -٨)$

$\vec{حـ} \times (\vec{ب} \times \vec{أ}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ٠ & ٠ \\ -٦ & -٥ & -٨ \end{vmatrix}$

$= ٢٤\,\vec{ص} - ١٥\,\vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} = \vec{حـ} \times (\vec{ب} \times \vec{أ})$

(٣) ∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ & ١ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ١٨$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = ١٨$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ}$

٣٦

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$

$= (-١٢ + ٢)\,\vec{س} - (-٨ - ١)\,\vec{ص} + (٤ + ٣)\,\vec{ع} = -١٠\,\vec{س} + ٩\,\vec{ص} + ٧\,\vec{ع}$

$\vec{أ} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= (٣ + ١)\,\vec{س} - (٢ + ١)\,\vec{ص} + (٢ - ٣)\,\vec{ع}$

$= ٤\,\vec{س} - ٣\,\vec{ص} - \vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \cdot (\vec{أ} \times \vec{حـ}) = (-١٠ ، ٩ ، ٧) \cdot (٤ ، -٣ ، -١)$

$= -٤٠ - ٢٧ - ٧ = -٧٤$

٣٧

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} \times \frac{-٦}{٧} + \frac{٦}{٧} \times \frac{٢}{٧} =$ صفر

∴ $\vec{أ} \perp \vec{ب}$

$\vec{أ} \cdot \vec{حـ} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٦}{٧} + \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٧} + \frac{٦}{٧} \times \frac{-٣}{٧} =$ صفر

∴ $\vec{أ} \perp \vec{حـ}$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٦}{٧} + \frac{-٦}{٧} \times \frac{٢}{٧} + \frac{٢}{٧} \times \frac{-٣}{٧} =$ صفر

∴ $\vec{ب} \perp \vec{حـ}$

، $\|\vec{أ}\| = ١$ ، $\|\vec{ب}\| = ١$ ، $\|\vec{حـ}\| = ١$

∴ $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{٣}{٧} & \frac{٦}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{-٦}{٧} & \frac{٢}{٧} \end{vmatrix}$

$= (\frac{٦}{٤٩} + \frac{٣٦}{٤٩})\,\vec{س} - (\frac{٤}{٤٩} - \frac{١٨}{٤٩})\,\vec{ص} + (\frac{-١٢}{٤٩} - \frac{٩}{٤٩})\,\vec{ع}$

$= \frac{٦}{٧}\,\vec{س} + \frac{٢}{٧}\,\vec{ص} - \frac{٣}{٧}\,\vec{ع} = \vec{حـ}$

٣٨

$\vec{أ} + \vec{حـ} = (-١ ، ٢ ، ١) + (٠ ، ١ ، -١)$

$= (-١ ، ١٠ ، ٠)$

$\vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & -٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= -٢\,\vec{س} + ٤\,\vec{ص} + ٦\,\vec{ع}$

$\vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$

$= -\vec{س} + ٣\,\vec{ص} + ٣\,\vec{ع}$

$(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times (\vec{ب} \times \vec{حـ}) = (-٢ ، ٤ ، ٦) \times (-١ ، ٣ ، ٣)$

$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٦\,\vec{س} - ٢\,\vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} + \vec{حـ}) \cdot [(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times (\vec{ب} \times \vec{حـ})]$

$= (-١ ، -١ ، ٠) \cdot (-٦ ، ٠ ، -٢) = ٦$

٣٩

∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٦٠$

∴ حجم متوازي السطوح $= |٦٠| = ٦٠$ وحدة حجم

٤٠

∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} -٢ & ٧ & ٥ \\ -٥ & ٧ & -٣ \\ ٧ & -٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٦٤$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٢٦٤|$

$= ٢٦٤$ وحدة حجم

٤١

(١) ∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ & ١ \\ -١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤٩$

∴ حجم متوازي السطوح $= ٤٩$ وحدة حجم

(٢) ∵ $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= -٧\,\vec{ص} + ١٤\,\vec{ع}$

∴ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \sqrt{٤٩ + ١٩٦} = ٧\sqrt{٥}$ وحدة مساحة

∴ مساحة القاعدة $= ٧\sqrt{٥}$

∴ ارتفاع متوازي السطوح $= \frac{الحجم}{مساحة القاعدة}$

$= \frac{٤٩}{٧\sqrt{٥}} = \frac{٧\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول.

٤٢

∵ $\begin{vmatrix} -١٢ & ٠ & ل \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ١ & -١٥ \end{vmatrix} = ٥٢٨ - ٦ل$

∴ حجم متوازي السطوح $= |٥٢٨ - ٦ل| = ٥٤٦$

∴ $|٦ل - ٥٢٨| = ٥٤٦$

∴ إما $٦ل - ٥٢٨ = ٥٤٦$ ومنها $ل = ١٧٩$

أو $٦ل - ٥٢٨ = -٥٤٦$ ومنها $ل = -٣$

٤٣

$\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (١ ، ٠ ، ٢)$

$\overrightarrow{أحـ} = \vec{حـ} - \vec{أ} = (٢ ، ١ ، ١)$

$\overrightarrow{أد} = \vec{د} - \vec{أ} = (٢ ، ٢ ، ٣)$

∵ $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ} \times \overrightarrow{أد} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥$

∴ حجم متوازي السطوح $= |٥| = ٥$ وحدة حجم.

٤٤

$\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ متجهات غير صفرية

، $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$ صفر

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ تقع فى نفس المستوى.

٤٥

$\overrightarrow{\text{أب}} = (-2 ، -4 ، -6)$

$\overrightarrow{\text{أحـ}} = (-1 ، -3 ، -8)$

$\overrightarrow{\text{أء}} = (1 ، 0 ، -7)$

، $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{أء}} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} =$ صفر

∴ أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى مستوى واحد.

٤٦

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ فى مستوى واحد

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} =$ صفر

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & ل & -3 \end{vmatrix} = 0$

$(-3 - 2ل) - (-1)(-9 - 2) + 1(3ل - 1) = 0$

$-3 - 2ل - 11 + 3ل - 1 = 0$

$ل - 15 = 0$ ∴ $ل = 15$

٤٧

$\overrightarrow{\text{أب}} = (-1 ، 5 ، -3)$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = (-4 ، 3 ، 3)$

$\overrightarrow{\text{أء}} = (1 ، 7 ، ك + 1)$

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء فى مستوى واحد

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{أء}} =$ صفر

$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & ك+1 \end{vmatrix} = 0$

∴ $(-1)\left(3(ك+1) - 21\right) - 5\left((-4)(ك+1) - 3\right)$

$+ (-3)(-28 - 3) = 0$

∴ $-3ك - 3 + 21 + 20ك + 20 + 15 + 93 = 0$

∴ $17ك + 146 = 0$ ∴ $ك = \frac{-146}{17}$

٤٨

① $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^2 + |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}|^2$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جا}^2\theta + \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جتا}^2\theta$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2$

② إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} =$ صفر فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

أو أحدهما = $\overrightarrow{\text{و}}$

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$

أو أحدهما = $\overrightarrow{\text{و}}$

∵ لا يمكن أن يكون $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$

فى نفس الوقت.

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

٤٩

الطرف الأيمن

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

$+ \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$

$+ (-\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}) + (-\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}) = \overrightarrow{\text{و}} =$ الطرف الأيسر.

٥٠

الطرف الأيمن

$= (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \times (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

$= \overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{و}}$

$= 2\, \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} =$ الطرف الأيسر.

٥١

$(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}}) \times (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ء}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ء}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$

$= \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ء}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{و}}$

∴ المتجه $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}})$ يوازى المتجه $(\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

٥٢

$\frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جا}^2\theta + \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جتا}^2\theta}{2 \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2}$

$= \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)}{2 \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2} = \frac{1}{2}$

٥٣

الطرف الأيسر

$= \sqrt{(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}})(\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) - (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})^2}$

$= \sqrt{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 - \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جتا}^2\theta}$

$= \sqrt{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 (1 - \text{جتا}^2\theta)}$

$= \sqrt{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 \text{جا}^2\theta}$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{جا}\theta = |\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}| =$ الطرف الأيمن.

٥٤

مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

$= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{بأ}} \times \overrightarrow{\text{بحـ}}\|$

$= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{حـأ}} \times \overrightarrow{\text{حـب}}\|$

∴ $\frac{1}{2}$ (أب) (أحـ) جا أ $= \frac{1}{2}$ (أب) (بحـ) جا ب

$= \frac{1}{2}$ (أحـ) (بحـ) جا حـ

وبالقسمة على $\frac{1}{2}$ (أب) (أحـ) (بحـ)

∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{أب}}$

∴ $\frac{\text{بحـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أب}}{\text{جا حـ}}$

٥٥

نفرض أن :

$\overrightarrow{\text{أحـ}} \cap \overrightarrow{\text{بء}} = \{م\}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{بء}}\|$

$= \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| \cdot \|\overrightarrow{\text{بء}}\|$ جا (ق ∠ أ م ب)

= (أحـ) (بء) جا (ق ∠ أ م ب)

= ٢ مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء

∴ مساحة الشكل الرباعى $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{بء}}\|$

٥٦

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ متجه وحدة. ∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = 1$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جا $\theta = 1$ ∴ جا $\theta = 1$

∴ $\theta = 90°$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

٥٧

$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = 1$ بالتربيع

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 1$

$1 + 2 \times 1 \times 1$ جتا $\theta + 1 = 1$ جتا $\theta = \frac{-1}{2}$

$\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|^2 = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} - 2\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

$= 1 - 2 \times 1 \times 1 \times$ جتا $\theta + 1$

$= 2 - 2 \times \frac{-1}{2} = 3$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{3}$

٥٨

① الطرف الأيمن $= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$ ...

إجابات تمارين 5

أولاً: تمارين على معادلة الخط المستقيم فى الفراغ

١

(١) متجه الاتجاه = (-١ ، ٢ ، -٢) - (٠ ، ٠ ، ٠) = (-١ ، ٢ ، -٢)

(٢) متجه الاتجاه = حـ ء = (١ ، ١ ، -١) - (٠ ، -٢ ، ٣) = (١ ، ٣ ، -٤)

٢

(١) أ (-١ ، ٢ ، ٣) ∴ جيوب تمام أ = أ / ‖أ‖ = (-١ ، ٢ ، ٣) / √((-١)² + (٢)² + (٣)²)

∴ جيوب تمام المستقيم = ± (-١/√١٤ ، ٢/√١٤ ، ٣/√١٤)

(٢) ب (١ ، ١ ، ١) ∴ جيوب تمام ب = ب / ‖ب‖ = (١ ، ١ ، ١) / √(١² + ١² + ١²)

∴ جيوب تمام المستقيم = ± (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

٣

متجه اتجاه المستقيم = (٦ ، -٧ ، -١) - (٢ ، -٣ ، ١) = (٤ ، -٤ ، -٢)

∴ نسب الاتجاه للمستقيم هى ٤ ، -٤ ، -٢

، متجه وحدة فى اتجاه المستقيم المطلوب = ± (٤ ، -٤ ، -٢) / √((٤)² + (-٤)² + (-٢)²) = ± (٢/٣ ، -٢/٣ ، -١/٣)

∴ جيوب تمام الاتجاه هى ٢/٣ ، -٢/٣ ، -١/٣

أو -٢/٣ ، ٢/٣ ، ١/٣

٤

المعادلة المتجهة: ر = (٤ ، -٢ ، ٥) + ك (١ ، -٢ ، ٢)

∴ س - ٤ = (ص + ٢)/-٢ = (ع - ٥)/٢

، بوضع ص = ٢ ∴ س = ٢ ، ع = ١

∴ (٢ ، ٢ ، ١) إحداثيات نقطة على المستقيم.

٥

متجه الاتجاه = أب = (٣ ، -٢ ، ٦) - (-١ ، ٤ ، ٢) = (٤ ، -٦ ، ٤)

، المعادلة المتجهة:

ر = (-١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، -٦ ، ٤)

المعادلات البارامترية:

س = -١ + ٤ك ، ص = ٤ - ٦ك ، ع = ٢ + ٤ك

المعادلة الإحداثية:

(س + ١)/٤ = (ص - ٤)/-٦ = (ع - ٢)/٤

٦

بوضع (س + ٤)/٣ = (٢ص + ٥)/٢ = (٤ - ع)/٤ = ك

∴ س = ٣ك - ٤ ، ص = ك - ٥/٢

، ع = -٤ك + ٤

، المعادلة المتجهة:

ر = (-٤ ، -٥/٢ ، ٤) + ك (٣ ، ١ ، -٤)

وبوضع س = ٢

∴ ص = -١/٢ ، ع = -٤

∴ (٢ ، -١/٢ ، -٤) إحداثيات نقطة تقع على المستقيم.

٧

متجه الاتجاه = أب = (٥ ، ٨ ، ٠) - (٣ ، ٢ ، ٤) = (٢ ، ٦ ، -٤)

المعادلة المتجهة:

ر = (٣ ، ٢ ، ٤) + ك (٢ ، ٦ ، -٤)

، المعادلة البارامترية:

س = ٣ + ٢ك ، ص = ٢ + ٦ك ، ع = ٤ - ٤ك

، المعادلة الإحداثية:

(س - ٣)/٢ = (ص - ٢)/٦ = (ع - ٤)/-٤

بوضع س = ١

∴ ص = ٥ ∴ ع = ٢

∴ النقطة حـ ∈ المستقيم

أى أن: أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٨

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (جـ)	(٥) (جـ)
(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (ب)	(٩) (جـ)	(١٠) (ب)
(١١) (أ)	(١٢) (أ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (أ)
(١٦) (ب)	(١٧) (أ)	(١٨) (جـ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (د)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (د)
(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (جـ)	(٢٩) (ب)	(٣٠) (جـ)
(٣١) (د)	(٣٢) (د)	(٣٣) (د)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (ب)
(٣٦) (جـ)	(٣٧) (ب)			

٩

(١) متجه اتجاه المستقيم

= (-١ ، ٢ ، ٤) - (٣ ، ٢ ، ١) = (-٤ ، ٠ ، ٣)

المعادلة المتجهة

ر = (-١ ، ٢ ، ٤) + ك (-٤ ، ٠ ، ٣)

، المعادلة البارامترية:

س = -١ - ٤ك ، ص = ٢ ، ع = ٤ + ٣ك

، المعادلة الإحداثية: (س + ١)/-٤ = (ع - ٤)/٣ ، ص = ٢

(٢) متجه اتجاه المستقيم

= (-٣ ، ١ ، ٤) - (٢ ، -١ ، ٥) = (-٥ ، ٢ ، -١)

، المعادلة المتجهة:

ر = (-٣ ، ١ ، ٤) + ك (-٥ ، ٢ ، -١)

، المعادلة البارامترية:

س = -٣ - ٥ك ، ص = ١ + ٢ك ، ع = ٤ - ك

، المعادلة الإحداثية:

(س + ٣)/-٥ = (ص - ١)/٢ = (ع - ٤)/-١

(٣) المعادلة المتجهة:

ر = ك (-٢ ، ٣ ، ١)

، المعادلة البارامترية:

س = -٢ك ، ص = ٣ك ، ع = ك

، المعادلة الإحداثية: س/-٢ = ص/٣ = ع/١

(٤) المعادلة المتجهة:

ر = (٤ ، -٢ ، ٥) + ك (٢ ، ١ ، -١)

، المعادلة البارامترية: س = ٤ + ٢ك

، ص = -٢ + ك ، ع = ٥ - ك

، المعادلة الإحداثية:

(س - ٤)/٢ = (ص + ٢)/١ = (ع - ٥)/-١

(٥) المعادلة المتجهة:

ر = (٢ ، ٠ ، -٣) + ك (٢ ، -٣ ، ٠)

، المعادلة البارامترية:

س = ٢ + ٢ك ، ص = -٣ك ، ع = -٣

، المعادلة الإحداثية: (س - ٢)/٢ = ص/-٣ ، ع = -٣

(٦) ∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

∴ جتا² θس + جتا² θص + جتا² θع = ١

∴ جتا θس = جتا θص = جتا θع = ١/√٣

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

أى أن متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ١ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة

ر = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك (١ ، ١ ، ١)

، المعادلة البارامترية

س = ٢ + ك ، ص = ٣ + ك ، ع = ٥ + ك

، المعادلة الإحداثية

س - ٢ = ص - ٣ = ع - ٥

(٧) متجه الاتجاه = $\overrightarrow{بـحـ}$ = (٢ ، ١ ، ٠) − (−٣ ، ٢ ، ١)
= (٥ ، −١ ، −١)

المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٥ ، −١ ، −١)

، المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = −١ − ك ، ع = −ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع}{-١}$

∵ $\frac{-١٤ - ١}{٥} = -٣$ ، $\frac{٢ + ١}{-١} = -٣$ ، $\frac{٣}{-١} = -٣$

∴ النقطة (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم

(٨) متجه الاتجاه = (٤ ، ٥ ، ٣)

المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، ٥ ، ٣)

، المعادلة البارامترية :

س = −١ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٥ ك ، ع = ٢ + ٣ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س + ١}{٤} = \frac{ص - ٤}{٥} = \frac{ع - ٢}{٣}$

(٩) متجه الاتجاه = (٤ ، −٣ ، ٢١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (١ ، ٥ ، −٢) + ك (٤ ، −٣ ، ٢١)

، المعادلة البارامترية : س = ١ + ٤ ك

، ص = ٥ − ٣ ك ، ع = −٢ + ٢١ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ٥}{-٣} = \frac{ع + ٢}{٢١}$

(١٠) منتصف $\overline{أب}$ = م $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{-٧ + ٣}{٢}\right)$

= م (−١ ، ٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\overrightarrow{حـم}$

= (−١ ، ٤ ، −٢) − (٤ ، −٧ ، −٢)

= (−٥ ، ١١ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٤ ، −٧ ، −٢) + ك (−٥ ، ١١ ، ٠)

، المعادلة البارامترية :

س = ٤ − ٥ ك ، ص = −٧ + ١١ ك ، ع = −٢

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٤}{-٥} = \frac{ص + ٧}{١١}$ ، ع = −٢

(١١) معادلة الكرة :

س² + ص² + ع² − س + ٢ ص − ٣ ع = $\frac{١}{٢}$

مركز الكرة هو : $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

متجه الاتجاه = (١ ، −١ ، ١) − $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

= $\left(\frac{١}{٢} ، ٠ ، \frac{-١}{٢}\right)$

∴ (١ ، ٠ ، −١) أيضًا متجه اتجاه

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (١ ، −١ ، ١) + ك (١ ، ٠ ، −١)

المعادلة البارامترية :

س = ١ + ك ، ص = −١ ، ع = ١ − ك

، المعادلة الإحداثية :

س − ١ = − ع + ١ ، ص = −١

(١٢) المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٩ + ٢ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ٩}{٢}$

(١٣) بوضع $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٤}{٥} = \frac{ع + ٧}{-٢}$ = ك

∴ س = ٢ + ك ، ص = ٥ ك − ٤

، ع = −٢ ك + ٧

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٢ ، −٤ ، ٧) + ك (١ ، ٥ ، −٢)

(١٤) بوضع : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ ص - ١}{٥} = \frac{٣ ع + ٢}{٤}$ = ك

∴ س = ٢ ك − ٣ ، ص = $\frac{٥}{٢}$ ك + $\frac{١}{٢}$

، ع = $\frac{٤}{٣}$ ك − $\frac{٢}{٣}$

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = $\left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$ + ك $\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

(١٥) إحداثيات أي نقطة تقع على منصف الربع الثاني من المستوى ص ع :

هي : (٠ ، −أ ، أ)

نأخذ أي نقطة على المنصف وليكن : (٠ ، −١ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٠ ، −١ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (١ ، −٢ ، ٥) + ك (٠ ، −١ ، ١)

، المعادلة البارامترية :

س = ١ ، ص = −٢ − ك ، ع = ٥ + ك

، المعادلة الإحداثية :

س = ١ ، $\frac{ص + ٢}{-١} = \frac{ع - ٥}{١}$

١٠

من هندسة الشكل :



أ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ متجه اتجاه المستقيم

الذي يحمل القطر = $\overrightarrow{وأ}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = ك (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة البارامترية :

س = ٥ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٥ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٥}$

أي أن : س = ص = ع

١١

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{بـحـ}$:

متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{بـحـ}$ = (٧ ، −٢ ، ٥) − (١ ، ٢ ، ٣)

= (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{بـحـ}$ هي :

$\vec{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ نقطة المسقط ولتكن

ء = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)

$\overrightarrow{أء}$ = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)

− (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك)

∵ $\overleftrightarrow{أء} \perp \overleftrightarrow{بـحـ}$

∴ $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{بـحـ}$ = صفر

∴ (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك) · (٦ ، −٤ ، ٢)

= صفر

∴ ٦ + ٣٦ ك + ٢٨ + ١٦ ك + (−٦) + ٤ ك = ٠

∴ ٥٦ ك = −٢٨

∴ ك = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ء هي (−٢ ، ٤ ، ٢)

١٢

∵ $\vec{هـ}$ = (أ ، ب ، صفر)

∴ المستقيم يقع في مستوى يوازي المستوى س ص

١٣

الصواب هو :

(١) مجموع مربعات جيوب تمام الاتجاه لأي مستقيم = ١

(٢) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين هي

$\frac{(س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١ ، ع_٢ - ع_١)}{\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}}$

٥

بوضع س = (ص − ٤)/(−١) = (ع + ١)/٢ = ك٢

∴ س = ك٢ ، ص = − ك٢ + ٤ ، ع = ٢ ك٢ − ١

، عند تقاطع المستقيمين :

٣ + ٤ ك١ = ك٢ ∴ ٤ ك١ − ك٢ = −٣ (١)

، −١ + ك١ = − ك٢ + ٤

∴ ك١ + ك٢ = ٥ (٢)

، ن + ٣ ك١ = ٢ ك٢ − ١

٣ ك١ − ٢ ك٢ = −١ − ن (٣)

ومن (١) ، (٢) :

ك١ = ٢/٥ ، ك٢ = ٢٣/٥

، ∵ المستقيمين متقاطعان

∴ قيم ك١ ، ك٢ تحقق المعادلة (٣)

∴ ٣ × ٢/٥ − ٢ × ٢٣/٥ = −١ − ن

∴ ن = ٧

، نقطة التقاطع هي : (٢٣/٥ ، −٣/٥ ، ٤١/٥)

٦

بوضع (س + ٢)/٢ = ص/(−٣) = (ع − ١)/٤ = ك١

∴ س = ٢ ك١ − ٢ ، ص = −٣ ك١ ، ع = ٤ ك١ + ١

، بوضع (س − ٣)/أ = (ص − ١)/٤ = (ع − ٧)/٢ = ك٢

∴ س = أ ك٢ + ٣ ، ص = ٤ ك٢ + ١

، ع = ٢ ك٢ + ٧

، عند تقاطع المستقيمين :

٢ ك١ − ٢ = أ ك٢ + ٣ ∴ ٢ ك١ − أ ك٢ = ٥ (١)

، −٣ ك١ = ٤ ك٢ + ١

−٣ ك١ − ٤ ك٢ = ١ (٢)

، ٤ ك١ + ١ = ٢ ك٢ + ٧

٤ ك١ − ٢ ك٢ = ٦ (٣)

ومن (٢) ، (٣) :

∴ ك١ = ١ ، ك٢ = −١

، ∵ المستقيمين متقاطعان

∴ قيم ك١ ، ك٢ تحقق المعادلة (١)

∴ ٢ + أ = ٥ ∴ أ = ٣

٧

∵ ل١ : (س − ١)/٣ = (ص − ٢)/٤ = (ع − ٣)/(−١٢)

∴ ه١ = (٣ ، ٤ ، −١٢)

، ل٢ : (س − ٤)/٣ = (ص − ٦)/٤ = (ع + ٩)/(−١٢)

، ه٢ = (٣ ، ٤ ، −١٢)

∴ ل١ ، ل٢ لهما نفس متجه الاتجاه (١)

بوضع س = ٤ في معادلة ل١

∴ ص = ٦ ، ع = −٩

∴ النقطة (٤ ، ٦ ، −٩) ∈ ل١

ونجد أن هذه النقطة تحقق معادلة ل٢

∴ (٤ ، ٦ ، −٩) ∈ لكل من ل١ ، ل٢ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ل١ ، ل٢ يمثلان نفس الخط المستقيم.

٨

عند نقطة التقاطع : ر١ = ر٢

(٢ ، ٣ ، ٤) + ك١ (−٤ ، −٤ ، ٥) = (−٦ ، −١٠ ، −١)
+ ك٢ (٠ ، ١ ، ٣)

∴ ٢ − ٤ ك١ = −٦ ∴ ك١ = ٢ (١)

٣ − ٤ ك١ = −١٠ + ك٢

٤ ك١ + ك٢ = ١٣ (٢)

٤ + ٥ ك١ = −١ + ٣ ك٢

٥ ك١ − ٣ ك٢ = −٥ (٣)

من (١) ، (٢) : ك١ = ٢ ، ك٢ = ٥

∴ (س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٤) + ٢ (−٤ ، −٤ ، ٥)

∴ نقطة التقاطع = (−٦ ، −٥ ، ١٤)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (−٦ ، −٥ ، ١٤)

، المعادلة المتجهة : ر = ك (−٦ ، −٥ ، ١٤)

، المعادلة البارامترية :

س = −٦ ك ، ص = −٥ ك ، ع = ١٤ ك

، المعادلة الإحداثية : س/(−٦) = ص/(−٥) = ع/١٤

٩

عند نقطة التقاطع : ر١ = ر٢

(١ ، ٢ ، ٣) + ك١ (٢ ، ٣ ، ٣) = (٣ ، ٥ ، ٦)
+ ك٢ (٤ ، ٥ ، ٣)

١ + ٢ ك١ = ٣ + ٤ ك٢

∴ ٢ ك١ − ٤ ك٢ = ٢ (١)

٢ + ٣ ك١ = ٥ + ٥ ك٢

٣ ك١ − ٥ ك٢ = ٣ (٢)

٣ + ٣ ك١ = ٦ + ٣ ك٢

٣ ك١ − ٣ ك٢ = ٣ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك١ = ١ ، ك٢ = ٠

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، ٣) + ١ (٢ ، ٣ ، ٣)

∴ نقطة التقاطع هي : (٣ ، ٥ ، ٦)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

= (٣ ، ٥ ، ٦) − (٢ ، −١ ، ٣) = (١ ، ٦ ، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هي :

ر = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٦ ، ٣)

المعادلة البارامترية للمستقيم المطلوب هي :

س = ٢ + ك ، ص = −١ + ٦ ك ، ع = ٣ + ٣ ك

المعادلة الإحداثية للمستقيم المطلوب هي :

س − ٢ = (ص + ١)/٦ = (ع − ٣)/٣

∴ (−٢ ، ٢ ، −٤) . (−٢ − ٢ ك ، −٣ + ٢ ك
، ٢ − ٤ ك) = ٠

∴ ٤ + ٤ ك − ٦ + ٤ ك − ١٢ + ١٦ ك = ٠

∴ ك = ٧/١٢

∴ حـ ن = (−١٩/٦ ، −١١/٦ ، ٢/٣) = (−١٩ ، −١١ ، ٤)

∴ معادلة المستقيم هي :

ر = (٣ ، ١ ، −٢) + ك (−١٩ ، −١١ ، ٤)

١٢

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

في نقطة حـ

∴ حـ ∈ المستقيم ل١

∴ حـ = (١ + ٢ ك ، −١ + ٢ ك
، ٢ − ك)

متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب) ه٢ = أحـ = حـ − أ

∴ ه٢ = (٢ ك − ١ ، ٢ ك ، − ك − ١)

∵ ه١ = (٢ ، ٢ ، −١)

∵ المستقيمين متعامدان

∴ ه١ . ه٢ = ٠

∴ (٢ ، ٢ ، −١) . (٢ ك − ١ ، ٢ ك ، − ك − ١) = ٠

∴ ٤ ك − ٢ + ٤ ك + ك + ١ = ٠

∴ ٩ ك = ١ ومنها ك = ١/٩

∴ ه٢ = (−٧/٩ ، ٢/٩ ، −١٠/٩)

= (−٧ ، ٢ ، −١٠)

∴ معادلة ل٢ هي :

ر = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (−٧ ، ٢ ، −١٠)

١٣

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

∴ متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب)

ه٢ = و حـ

= حـ − و = (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ ك)

، ∵ ه١ = (٢ ، ١ ، ٣) ∴ ه١ . ه٢ = ٠

∵ المستقيمين متعامدان

(٢ ، ١ ، ٣) . (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ ك) = ٠

٦ + ٤ ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ ك = ٠

∴ ك = −١٩/١٤

∴ ه٢ = (٢/٧ ، −٥/١٤ ، −١/١٤) = (٤ ، −٥ ، −١)

∴ معادلة ل٢ هي :

ر = ك (٤ ، −٥ ، −١)

١٤

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

في نقطة حـ

حـ ∈ المستقيم ل١

∴ حـ = (٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ − ك)

متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب)

ه٢ = أحـ = (−١ + ك ، ٢ + ٢ ك ، ١ − ك)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ ه١ . ه٢ = ٠

∴ (١ ، ٢ ، −١) . (−١ + ك ، ٢ + ٢ ك ، ١ − ك) = ٠

∴ −١ + ك + ٤ + ٤ ك − ١ + ك = ٠

∴ ك = −١/٣

∴ ه٢ = (−٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)

∴ معادلة ل٢ هي :

ر = (٢ ، −١ ، ٠) + ك (−٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)

١٥

∵ ه١ = (٠ ، −٥ ، ٥) ، ه٢ = (٥ ، −١ ، −١)

∵ ه١ . ه٢ = (٠ ، −٥ ، ٥) . (٥ ، −١ ، −١) = ٠

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

(٣ ، −٢ ، ٥) + ك١ (٠ ، −٥ ، ٥) = (−٢ ، ٣ ، ١)
+ ك٢ (٥ ، −١ ، −١)

٣ = −٢ + ٥ ك٢ ∴ ك٢ = ١ (١)

−٣ − ٥ ك١ = ٣ − ك٢ ∴ ٥ ك١ − ك٢ = −٦ (٢)

٥ + ٥ ك١ = ١ − ك٢ ∴ ٥ ك١ + ك٢ = −٤ (٣)

من (٢) ، (٣) ينتج أن

ك١ = −١ ، ك٢ = ١

وهذا يتحقق مع معادلة (١) أيضًا

∴ المستقيمان متقاطعان ومتعامدان

، (س ، ص ، ع) = (٣ ، −٣ ، ٥) − (٠ ، −٥ ، ٥)

∴ إحداثيات نقطة التقاطع هي (٣ ، ٢ ، ٠)

١٦

∵ ١/٢ ≠ ١/(−١) ≠ ٣/٢

∴ المستقيمان غير متوازيين

، عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

∴ (٢ ، −١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣) = (٠ ، ٤ ، −١)
+ ك٢ (١ ، −١ ، ٢)

∴ ٢ + ٤ ك١ = ك٢ (١)

∴ ٤ ك١ − ك٢ = −٢ (٢) ك١ + ك٢ = ٥

−١ + ك١ = ٤ − ك٢

٢ + ٣ ك١ = −١ + ٢ ك٢ (٣)

٣ ك١ − ٢ ك٢ = −٣

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك١ = ٣/٥ ، ك٢ = ٢٢/٥

والتعويض في معادلة (٣) : ٣ × ٣/٥ − ٢ × ٢٢/٥ ≠ −٣

أي أن هذه القيم لا تحقق معادلة (٣)

∴ المستقيمان متخالفان.

$\therefore (س ، ص ، ع) = (٠ ، ١ ، ٠) + ر (١ ، ٢ ، -١)$

$ر_١ = -١ ، ر_٢ = ١$

$\therefore ر_١ + ٢ ر_٢ = ٠$

$\therefore ر_١ = ١ - ٢ ر_٢$

$= (١ ، ١ ، ١) + ر_٢ (-٢ ، -٢ ، ٠)$

٣

$س = ٣ ، ص = -١ ، ع = ٢$

$٢ × -١ - ٤ × ٢ = -٦$

$\therefore ٢ ر_١ - ٢ ر_٢ = -٦$

$٢ ر_١ + ٥ = ٢ ر_٢ - ٣$

$\therefore ٢ ر_١ + ٢ ر_٢ = ٢$

$٢ ر_١ + ١ = -٢ ر_٢ + ٤$

$\therefore ٢ ر_١ - ر_٢ = -٣$

$٢ ر_١ + ٤ = ٢ + ر_٢$

$٣ ر_١ + ١ = ٢ ر_٢ + ٨$

$-٢ ر_١ - ٣ ر_٢ = ١$

$-٢ ر_١ = ٣ ر_٢ + ١$

$ع = ٢ ر_٢ + ٨$

٤

$\therefore ر = ٨$

$\therefore ر_١ + ر_٢ = ٥$

$-١ + ر_١ = -ر_٢ + ٣$

$٢ + ٣ ر_١ = ر_٢$

٥

$٥ ر_١ - ٢ ر_٢ = -٥$

$٣ + ٥ ر_١ = -١ + ٢ ر_٢$

$٣ ر_١ + ر_٢ = ٢١$

$\therefore ر_٢ = (٢ ، ٣ ، -٢١)$

٧

٨

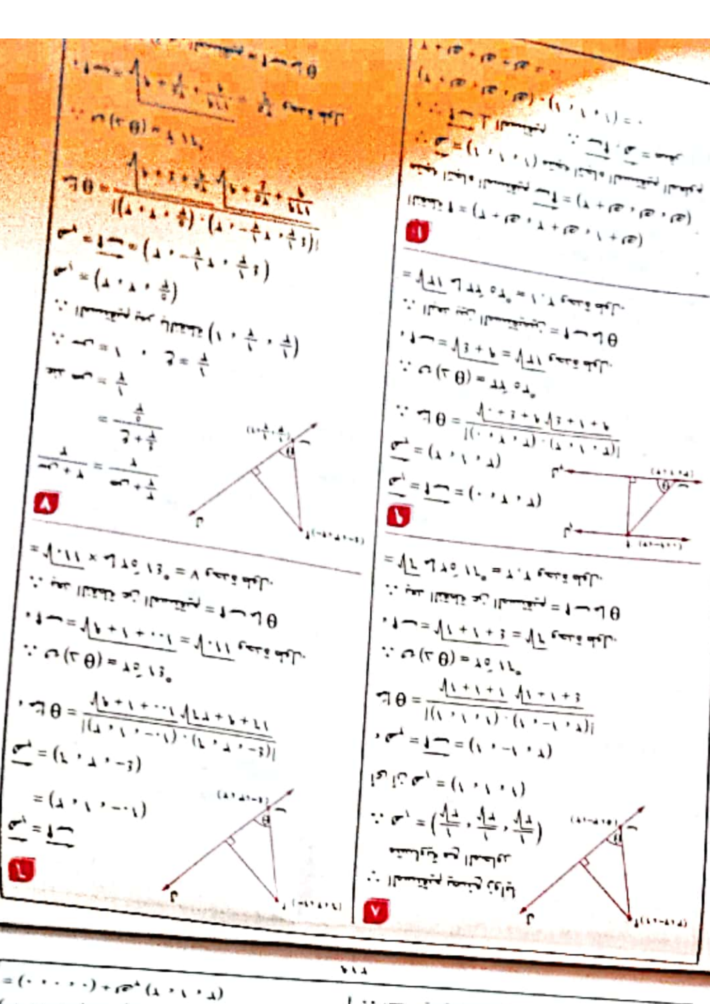
$\therefore ٢ + ٤ = ٥$

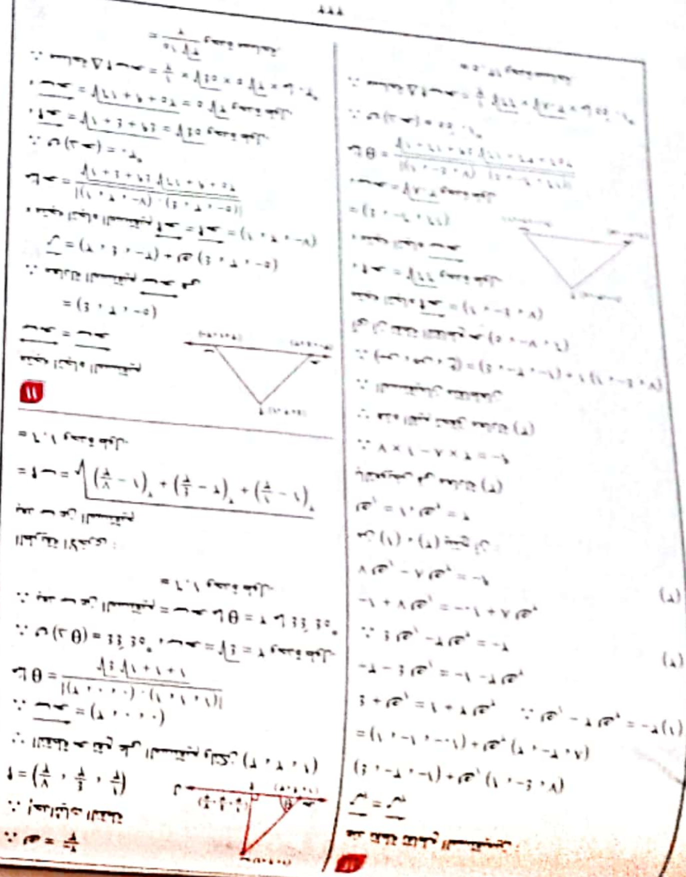
$\therefore ر_١ = ١ ، ر_٢ = -١$

$٣ ر_١ - ٢ ر_٢ = ٤$

$\overrightarrow{ل} = (٢ ، -١ ، ٢) + ر (١ ، ٤ ، ٢)$

٦





١٣

مركز الكرة م = (−١ ، ٢ ، ٥)

معادلة المستقيم هي:

ر = (٣ ، ٤ ، ٥) + ك (٢ ، −٣ ، ٦)

متجه اتجاه المستقيم ب م = (−٤ ، −٢ ، ٠)

، ب م = √٢٠ وحدة طول

متجه اتجاه المستقيم ل = (٢ ، −٣ ، ٦)

∴ جتا ب = |(−٤ ، −٢ ، ٠) . (٢ ، −٣ ، ٦)| ÷ (√(١٦ + ٤) √(٤ + ٩ + ٣٦))

ق(∠ب) ≃ ٨٦° ٢٠َ

∴ نق = ب م جا ب = √٢٠ جا ٨٦° ٢٠َ

≃ ٤,٤٦ وحدة طول.

حل آخر:

بوضع (س − ٥)/١ = (ص − ٣)/٣ = (ع − ١)/−٢ = ك

∴ س = ٥ + ك ، ص = ٣ + ٣ك ، ع = ١ − ٢ك

وبالتعويض في معادلة الكرة

∴ (٥ + ك)² + (٣ + ٣ك)² + (١ − ٢ك)² − ٢(٥ + ك)

− ٤(٣ + ٣ك) − ٢(١ − ٢ك) − ٣٩ = ٠

∴ ك² + ك − ٢ = ٠ ∴ (ك + ٢)(ك − ١) = ٠

∴ ك = −٢ أو ك = ١

∴ نقط التقاطع هي (٥ − ٢ ، ٣ − ٦ ، ١ + ٤)

= (٣ ، −٣ ، ٥) ، (٥ + ١ ، ٣ + ٣ ، ١ − ٢)

= (٦ ، ٦ ، −١)

∴ البعد بين النقطتين = √((٣)² + (٩)² + (−٦)²)

= √١٢٦ ≃ ١١,٢ وحدة طول.

١٤

مركز الكرة = (١ ، ٢ ، ١)

، نق = √(١ + ٤ + ١ + ٣٩)

= ٣√٥ وحدة طول

معادلة المستقيم ل:

ر = (٥ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم أ م = (−٤ ، −١ ، ٠)

، أ م = √١٧ وحدة طول

∴ جتا θ = |(−٤ ، −١ ، ٠) . (١ ، ٣ ، −٢)| ÷ (√(١٦ + ١) √(١ + ٩ + ٤))

ق(∠θ) ≃ ٦٣° ١َ

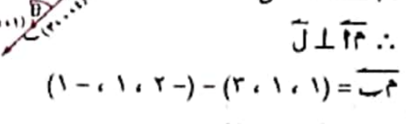
∴ م ن = أ م جا θ = √١٧ جا ٦٣° ١َ

≃ ٣,٦٧ وحدة طول

∴ ن حـ = √((نق)² − (م ن)²) ≃ ٥,٦

∴ ب حـ = ٢ × ٥,٦ = ١١,٢ وحدة طول.

١٥



بفرض م مركز الكرة

، أ نقطة التماس

∴ م أ ⊥ ل

م ب = (١ ، ١ ، ٣) − (−٢ ، ١ ، −١)

= (٣ ، ٠ ، ٤)

∴ جتا θ = |(٣ ، ٠ ، ٤) . (٤ ، ٠ ، ٣)| ÷ (√(٩ + ١٦) √(١٦ + ٩)) = ٢٤/٢٥

∴ θ ≃ ١٦° ٥َ ٣٧ً

∴ أ م = م ب جا θ = √(٩ + ١٦) جا ١٦° ٥َ ٣٧ً

= ١,٤ وحدة طول.

∴ طول نصف قطر الكرة = ١,٤ وحدة طول.

، مركزها (−٢ ، ١ ، −١)

∴ معادلة الكرة:

(س + ٢)² + (ص − ١)² + (ع + ١)² = ٤٩/٢٥

١٦

من هندسة الشكل:

ج = (ل ، ل ، ٠)

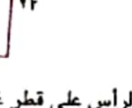
، ب = (ل ، ل ، ل)

ء = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ متجه اتجاه ج ء = (ل ، ل ، −ل)

متجه اتجاه ج ب = (٠ ، ٠ ، ل)

جتا θ = |(٠ ، ٠ ، ل) . (ل ، ل ، −ل)| ÷ (√ل² √(ل² + ل² + ل²)) = ل² ÷ (√٣ ل²) = ١/√٣



∴ ق(∠θ) ≃ ٥٤° ٤٤َ

∴ ب م = ل جا θ

ب م = ل × √٢/√٣ = (√٦/٣) ل

∴ طول العمود الساقط من الرأس على قطر غير مار به

= (√٦/٣) ل

١٧

بوضع (س − ١)/٢ = (ص − ٢)/٣ = (ع + ١)/٤ = ك

∴ س = ٢ك + ١ ، ص = ٣ك + ٢

، ع = ٤ك − ١

∴ أى نقطة على المستقيم تكون

(٢ك + ١ ، ٣ك + ٢ ، ٤ك − ١)

وبفرض أن ل بعد أى نقطة عن محور السينات

∴ ل² = (٣ك + ٢)² + (٤ك − ١)²

∴ ٢ل (ءل/ءك) = ٢(٣ك + ٢) × ٣ + ٢(٤ك − ١) × ٤

= ١٨ك + ١٢ + ٣٢ك − ٨ = ٥٠ك + ٤

وبوضع ءل/ءك = ٠ ∴ ك = −٢/٢٥

، ∵ إشارة لَ تتغير من السالب إلى الموجب

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة

عند ك = −٢/٢٥

، ل² = (٣ × −٢/٢٥ + ٢)² + (٤ × −٢/٢٥ − ١)² = ١٢١/٢٥

∴ ل = ٢,٢ وحدة طولية

∴ أقصر بعد بين المستقيم ومحور السينات

= ٢,٢ وحدة طولية

اجابات تمارين 6

١

① (جـ)	② (د)	③ (ب)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (أ)
⑪ (جـ)	⑫ (أ)	⑬ (ب)	⑭ (د)	

٢

ن . ر = ن . أ

(١ ، −٢ ، ٣) . ر = (١ ، −٢ ، ٣) . (٢ ، −٣ ، ١)

∴ (١ ، −٢ ، ٣) . ر = ١١

٣

∵ ن = (١ ، ٢ ، −٣)

∴ (١ ، ٢ ، −٣) . ر = (١ ، ٢ ، −٣) . (٠ ، ٠ ، ٠)

س + ٢ص − ٣ع = ٠

٤

(١ ، −١ ، ٣) . ر = (١ ، −١ ، ٣) . (−٣ ، ٤ ، ٢)

(١ ، −١ ، ٣) . ر = −١ (الصورة المتجهة)

١ (س + ٣) − (ص − ٤) + ٣ (ع − ٢) = ٠

(الصورة القياسية)

س − ص + ٣ع + ١ = ٠ (الصورة العامة)

٥

(٢ ، −٣ ، ٤) . ر = (٢ ، −٣ ، ٤) . (١ ، −١ ، ٤)

(٢ ، −٣ ، ٤) . ر = ٢١ (الصورة المتجهة)

∴ ‖ أب × أحـ ‖ = √((١٨)² + (١٢)² + (٢٤)²)
= ٦ √٢٩
∴ مساحة Δ أ ب حـ = ½ ‖ أب × أحـ ‖
= ٣ √٢٩ وحدة مربعة.

١٧

ن = (أ ، ب ، حـ)
∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (أ ، ب ، حـ)
∴ معادلة المستقيم هى : ر = (س١ ، ص١ ، ع١) + ك (أ ، ب ، حـ)

١٨

(١) ∵ المستويان متوازيان
∴ ن١ = ن٢ = (١ ، -٢ ، ٢)
∴ معادلة المستوى : ن · ر = ن · أ
(١ ، -٢ ، ٢) · ر = (١ ، -٢ ، ٢) · (١ ، -١ ، ٢)
(١ ، -٢ ، ٢) · ر = ٧
(١ ، -٢ ، ٢) · (س ، ص ، ع) = ٧
∴ س - ٢ ص + ٢ ع - ٧ = ٠

(٢) ن١ = أب = ب - أ = (١ ، ١ ، -١)
، ن٢ = (١ ، ١ ، ١)
∵ ن١ × ن٢ = | س ص ع ؛ ١ ١ -١ ؛ ١ ١ ١ |
= ٢ س - ٢ ص
∴ ن = (٢ ، -٢ ، ٠) ، أ = (١ ، ٢ ، -٣)
∴ معادلة المستوى المطلوب : ن · ر = ن · أ
(٢ ، -٢ ، ٠) · ر = (٢ ، -٢ ، ٠) · (١ ، ٢ ، -٣)
(٢ ، -٢ ، ٠) · ر = -٢
(٢ ، -٢ ، ٠) · (س ، ص ، ع) = -٢
٢ س - ٢ ص + ٢ = ٠
∴ س - ص + ١ = ٠

(٣) ن = (٢ ، ١ ، -١) × (٣ ، ٦ ، -٢)
= | س ص ع ؛ ٢ ١ -١ ؛ ٣ ٦ -٢ |
= ٤ س + ص + ٩ ع
∴ معادلة المستوى المطلوب : ن · ر = ن · أ
(٤ ، ١ ، ٩) · ر = (٤ ، ١ ، ٩) · (١ ، ٢ ، ٣)
(٤ ، ١ ، ٩) · ر = ٣٣
(٤ ، ١ ، ٩) · (س ، ص ، ع) = ٣٣
٤ س + ص + ٩ ع - ٣٣ = ٠

(٤) ن١ = (١ ، -٢ ، ٥) - (٢ ، ٢ ، ٣) = (-١ ، -٤ ، ٢)
ن٢ = (٣ ، -١ ، ٠)
∴ ن = ن١ × ن٢ = | س ص ع ؛ -١ -٤ ٢ ؛ ٣ -١ ٠ |
= ٢ س + ٦ ص + ١٣ ع
∴ معادلة المستوى المطلوب : ن · ر = ن · أ
(٢ ، ٦ ، ١٣) · ر = (٢ ، ٦ ، ١٣) · (١ ، -٢ ، ٥)
(٢ ، ٦ ، ١٣) · ر = ٥٥
(٢ ، ٦ ، ١٣) · (س ، ص ، ع) = ٥٥
٢ س + ٦ ص + ١٣ ع - ٥٥ = ٠

(٥) ن = (٤ ، -١ ، ٢) × (١ ، ٠ ، ٠)
= | س ص ع ؛ ٤ -١ ٢ ؛ ١ ٠ ٠ |
= ٢ ص + ع
∴ معادلة المستوى المطلوب : ن · ر = ن · أ
(٠ ، ٢ ، ١) · ر = (٠ ، ٢ ، ١) · (٤ ، -١ ، ٢)
(٠ ، ٢ ، ١) · ر = ٠
٢ ص + ع = ٠

حل آخر :
∵ المستوى يحوى محور السينات
∴ معادلته هى ب ص + حـ ع = ٠
∴ (ب/حـ) ص + ع = ٠
، ∵ المستوى يمر بالنقطة (٤ ، -١ ، ٢)
∴ (ب/حـ) × -١ + ٢ = ٠ ∴ ب/حـ = ٢
∴ معادلة المستوى هى : ٢ ص + ع = ٠

(٦) ∵ مسقط نقطة الأصل على المستوى هى (٢ ، ٣ ، -٥)
∴ ن = (٢ ، ٣ ، -٥) - (٠ ، ٠ ، ٠)
= (٢ ، ٣ ، -٥)
∴ معادلة المستوى المطلوب : ن · ر = ن · أ
(٢ ، ٣ ، -٥) · ر = (٢ ، ٣ ، -٥) · (٢ ، ٣ ، -٥)
(٢ ، ٣ ، -٥) · ر = ٣٨
(٢ ، ٣ ، -٥) · (س ، ص ، ع) = ٣٨
٢ س + ٣ ص - ٥ ع - ٣٨ = ٠

(٧) س/٢ + ص/-٣ + ع/٥ = ١

(٨) نفرض أن طول الجزء المقطوع من محاور الإحداثيات = أ
∴ معادلة المستوى : س/أ + ص/أ + ع/أ = ١
، ∵ (٣ ، ٥ ، -٧) ∈ للمستوى
∴ ٣/أ + ٥/أ + -٧/أ = ١ ∴ أ = ١
∴ معادلة المستوى المطلوب : س + ص + ع = ١

(٩) نفرض أن طول الجزء المقطوع من محورى الإحداثيات س ، ص = ك ، الجزء المقطوع من المحور ع = م
∴ معادلة المستوى هى : س/ك + ص/ك + ع/م = ١
∵ (٣ ، ٥ ، ١) ∈ للمستوى
٣/ك + ٥/ك + ١/م = ١
٨/ك + ١/م = ١ ∴ ١/م = ١ - ٨/ك

∴ ٨/م = ٨ - ٦٤/ك (١)
∵ (٧ ، ٧ ، ٨) ∈ للمستوى
∴ ٧/ك + ٧/ك + ٨/م = ١
∴ ١٤/ك + ٨/م = ١ ∴ ٨/م = ١ - ١٤/ك (٢)
من (١) ، (٢) ، ينتج أن :
٨ - ٦٤/ك = ١ - ١٤/ك ٧/١ = ٥٠/ك
∴ ك = ٥٠/٧ من (١) م = -٢٥/٣
∴ معادلة المستوى هى :
س/(٥٠/٧) + ص/(٥٠/٧) + ع/(-٢٥/٣) = ١
أى أن : ٧ س/٥٠ + ٧ ص/٥٠ - ٣ ع/٢٥ = ١

(١٠) معادلة المستوى المطلوب هى :
س/-٢ + ص/(٢/٣) + ع/ك = ١
∴ (-½ ، ٣/٢ ، ١/ك) متجه اتجاه عمودى للمستوى
، ∵ المستوى المطلوب عموديًا على المستوى
٢ س - ٢ ص + ٤ ع - ٥ = ٠
∴ (-½ ، ٣/٢ ، ١/ك) · (٢ ، -٢ ، ٤) = ٠
∴ -١ - ٣ + ٤/ك = ٠ ∴ ك = ١
∴ معادلة المستوى المطلوب هى :
س/-٢ + ص/(٢/٣) + ع = ١ (وبالضرب × ٢)
- س + ٣ ص + ٢ ع - ٢ = ٠

(١١) معادلة المستوى المطلوب هى :
س/-٢ + ص/ك + ع/٢ = ١
، ∵ المستوى يمر بـ (٦ ، -١٠ ، ١)
∴ ٦/-٢ + -١٠/ك + ½ = ١ ∴ ك = -٤
∴ المعادلة المطلوبة هى :
س/-٢ + ص/-٤ + ع/٢ = ١

(١٢) معادلة المستوى المطلوب :
س/٥ + ص/-٧ + ع/ك = ١
، ∵ (١ ، ١ ، ٢) يمر بها المستوى
∴ ١/٥ + ١/-٧ + ٢/ك = ١ ∴ ك = ٧٠/٣٣
∴ المستوى المطلوب هو : س/٥ + ص/-٧ + ع/(٧٠/٣٣) = ١

١٩

(١) ص = ٥ ، ع = ٤ (٢) س = ٣ ، ع = ٠
(٣) س = ٣ ، ص = ٥ (٤) ع = ٤ (٥) ع = ٠
(٦) س/٣ = (ص - ٥)/-٥ = (ع - ٤)/-٤
(٧) ٤ ص - ٥ ع = ٠

٢٠

∵ و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (٥ ، ٠ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ٣)
(١) متجه الاتجاه العمودى على المستوى المائل
ن = و أ × و ب
= | س ص ع ؛ ٥ ٠ ٣ ؛ ٥ ٢ ٣ |
= -٦ س + ١٠ ع
، ∵ المستوى يمر بنقطة الأصل
∴ معادلة المستوى المائل هى -٦ س + ١٠ ع = ٠
(٢) متجه اتجاه المستقيم و أ هو (٥ ، ٠ ، ٣)
∴ معادلة خط أكبر ميل هو ر = ك (٥ ، ٠ ، ٣)

٢١

يتقاطع المستقيمان عندما ر١ = ر٢
∴ (٣ ، ١ ، -١) + ك١ (١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٥ ، ٠) + ك٢ (١ ، -١ ، ١)
∴ ك١ - ك٢ = -١ (١)
٢ ك١ + ك٢ = ٤ (٢)
، ٣ ك١ - ك٢ = ١ (٣)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ ك١ = ١ ، ك٢ = ٢
وبالتعويض فى (٣) :
∴ ٣ (١) - (٢) = ١ (تحقق المعادلة)
∴ المستقيمان متقاطعان
∴ متجه الاتجاه العمودى على المستقيمين المتقاطعين
= | س ص ع ؛ ١ ٢ ٣ ؛ ١ -١ ١ | = (٥ ، ٢ ، -٣)
∴ معادلة المستوى المطلوب هى :
(٥ ، ٢ ، -٣) · ر = (٥ ، ٢ ، -٣) · (٣ ، ١ ، -١)
∴ ٥ س + ٢ ص - ٣ ع - ٢٠ = ٠

٢٢

ل١ : ٢ س = ٣ ص = ٤ ع
، ل٢ : ٣ س = ٢ ص = ٥ ع
يمران بنقطة الأصل
∴ المستقيمان متقاطعان
∴ متجه الاتجاه العمودى على مستويهما
= | س ص ع ؛ ½ ⅓ ¼ ؛ ⅓ ½ ⅕ |
= | س ص ع ؛ ٦ ٤ ٣ ؛ -٢١ ١٥ ٦ | = (-٢١ ، -٦ ، ٥٠)
∴ معادلة المستوى المطلوب هى
ر · (-٢١ ، -٦ ، ٥٠) = ٠
، المستوى يمر بنقطة الأصل.

٢٣

∵ ص١ = (٤ ، ١ ، ٢) ، ص٢ = (٨ ، ٢ ، ٦)
، ∵ ٤/٨ = ١/٢ ≠ ٢/٦ ... ∵ ٤/٨ = ١/٢ = ٣/٦
∴ المستقيمان متوازيان أو منطبقان
، ∵ النقطة أ (١ ، -٢ ، ٢) ∈ ل١
وبالتعويض بها فى ل٢ نجد أن أ ∉ ل٢
∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين
∴ يمكن أن يجمعهما مستوى واحد
ويفرض أ (١ ، -٢ ، ٢) ∈ ل١ ، ب (٣ ، ٤ ، -٥) ∈ ل٢
∴ أب = ب - أ = (٢ ، ٦ ، -٧)
∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب
= أب × ص١
= | س ص ع ؛ ٢ ٦ -٧ ؛ ٤ ١ ٢ |
= ٢٥ س - ٣٤ ص - ٢٢ ع
∴ معادلة المستوى هى (٢٥ ، -٣٤ ، -٢٢) · ر
= (٢٥ ، -٣٤ ، -٢٢) · (١ ، -٢ ، ٢)
∴ ٢٥ س - ٣٤ ص - ٢٢ ع = ٤٩

٢٤

متجه الاتجاه العمودى على المستوى
= | س ص ع ؛ ٦ -٢ -١ ؛ ١ -٣ ٣ | = (-٩ ، -١٩ ، -١٦)
، ∵ المستوى يحوى المستقيم
ر = (٠ ، ٣ ، -٥) + ك١ (٦ ، -٢ ، -١)
∴ المستوى يحوى النقطة (٠ ، ٣ ، -٥)
∴ المعادلة المطلوبة هى
ر · (-٩ ، -١٩ ، -١٦) = (٠ ، ٣ ، -٥) · (-٩ ، -١٩ ، -١٦)
∴ -٩ س - ١٩ ص - ١٦ ع - ٢٣ = ٠

٢٥

∵ النقطة (-١ ، ٣ ، -٢) تقع على المستقيم
∴ (-١ ، ٣ ، -٢) ∈ للمستوى المطلوب
∴ المتجه (-١ ، ٣ ، -٢) - (٠ ، ٧ ، -٧)
= (-١ ، -٤ ، ٥)
يقع فى المستوى
∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى
= | س ص ع ؛ -١ -٤ ٥ ؛ -٣ ٢ ١ | = (-١٤ ، -١٤ ، -١٤)
∴ المتجه (١ ، ١ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى
∴ معادلة المستوى المطلوب هى :
ر · (١ ، ١ ، ١) = (٠ ، ٧ ، -٧) · (١ ، ١ ، ١)
∴ س + ص + ع = ٠

٢٦

المتجه (١ ، ٢ ، ٣) يقع فى المستوى المطلوب
، المتجه (٢ ، ٧ ، -٣) يوازى المستوى المطلوب
∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى
= | س ص ع ؛ ١ ٢ ٣ ؛ ٢ ٧ -٣ | = (-٢٧ ، ٩ ، ٣)
∴ (-٩ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه عمودى للمستوى
∴ معادلة المستوى المطلوب هى
ر · (-٩ ، ٣ ، ١) = (٠ ، ٣ ، ٥) · (-٩ ، ٣ ، ١)
∴ -٩ س + ٣ ص + ع - ١١ = ٠

٢٧

متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب
= | س ص ع ؛ ١ ٢ ٣ ؛ ٢ ٣ ١ | = (-٧ ، ٨ ، -٣)

∴ معادلة المستوى المطلوبة هي :

$\overline{ر} \cdot (-٧ ، ٨ ، -٣) = (-١ ، ٣ ، ٢) \cdot (-٧ ، ٨ ، -٣)$

∴ −٧ س + ٨ ص − ٣ ع − ٢٥ = ٠

٢٨

متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = (-٢ ، -٤ ، -١٠)$

، ∵ المستوى يحوي نقطة الأصل

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

−٢ س − ٤ ص − ١٠ ع = ٠

∴ س + ٢ ص + ٥ ع = ٠

٢٩

① ∵ المستوى المطلوب يوازي المستوى

٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١

∴ [illegible] الاتجاه العمودي للمستويين واحد

∴ (٢ ، ٣ ، ٥) متجه اتجاه المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overline{ر} \cdot (٢ ، ٣ ، ٥) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (٢ ، ٣ ، ٥)$

∴ ٢ س + ٣ ص + ٥ ع − ٢٧ = ٠

② ∵ المستوى عمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ٥) − (١ ، ٦ ، ٤) = (٢ ، −٤ ، ١)

متجه اتجاه عمودي للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overline{ر} \cdot (٢ ، -٤ ، ١) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (٢ ، -٤ ، ١)$

∴ ٢ س − ٤ ص + ع − ٤ = ٠

③ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{vmatrix} = (-١٦ ، ٤٨ ، ٣٢)$

∴ المتجه (−١ ، ٣ ، ٢) متجه عمودي للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overline{ر} \cdot (-١ ، ٣ ، ٢) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (-١ ، ٣ ، ٢)$

∴ − س + ٣ ص + ٢ ع − ٩ = ٠

٣٠

∵ ع = ٢ + ٣ $ك_١$ ∴ $ك_١ = \frac{ع - ٢}{٣}$

، ∵ ص = ٤ − $ك_٢$ ∴ $ك_٢$ = ٤ − ص

∴ س = ٢ + ٢ × $\frac{ع - ٢}{٣}$ − ٤ (٤ − ص)

∴ ٣ س = ٦ + ٢ ع − ٤ − ٤٨ + ١٢ ص

∴ ٣ س − ٢ ع − ١٢ ص + ٤٦ = ٠

٣١

س = ٢ − $ك_١$ + ٦ $ك_٢$ (١)

ص = ٣ + ٣ $ك_١$ + $ك_٢$ (٢)

ع = ٥ + ٤ $ك_١$ − ٢ $ك_٢$ (٣)

بضرب المعادلة (١) × ٣ والجمع إلى المعادلة (٢)

∴ ٣ س + ص = ٩ + ١٩ $ك_٢$

∴ $ك_٢ = \frac{٣ س + ص - ٩}{١٩}$ (٤)

، بضرب المعادلة (٢) في −٦ والجمع إلى المعادلة (١)

∴ س − ٦ ص = −١٦ − ١٩ $ك_١$

∴ $ك_١ = \frac{-(س - ٦ ص + ١٦)}{١٩}$ (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) في (٣)

∴ ع = ٥ + $\frac{- ٤ س + ٢٤ ص - ٦٤}{١٩}$

+ $\frac{- ٦ س - ٢ ص + ١٨}{١٩}$

∴ ١٩ ع = ٩٥ − ٤ س + ٢٤ ص − ٦٤

− ٦ س − ٢ ص + ١٨

∴ ١٠ س − ٢٢ ص + ١٩ ع − ٤٩ = ٠

٣٢

∵ (٥ ، ٥ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم

، (٣ ، ٤ ، −٥) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ (٥ ، ٥ ، ٧) · (٣ ، ٤ ، −٥) = ١٥ + ٢٠ − ٣٥ = ٠

∴ المستقيم يوازي المستوى

، ∵ (٣ ، −١ ، −٤) تقع على المستقيم وبالتعويض بها في معادلة المستوى

∴ ٣ (٣) + ٤ (−١) −٥ (−٤) = ٢٥ تحقق المعادلة،

∴ المستقيم يقع في المستوى.

٣٣

بالتعويض بالنقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) في معادلة المستوى

∴ (٢ ، ٣ ، ١) · (٢ ، ٠ ، −١) = ٤ − ١ = ٣ (تحقق)

∴ أ (٢ ، ٣ ، ١) تقع في المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) متجه اتجاه المستقيم، (٢ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) · (٢ ، ٠ ، −١) = صفر

∴ المستقيم يوازي المستوى

، ∵ (٣ ، ١ ، ٢) ∈ للمستقيم وبالتعويض بها في معادلة المستوى

∴ (٣ ، ١ ، ٣) · (٢ ، ٠ ، −١) = ٦ − ٣ = ٢ (تحقق)

∴ المستقيم يقع في المستوى.

٣٤

∵ المتجه (٢ ، ٣ ، ٤) هو متجه اتجاه للمستقيم

، ∵ المتجه $(١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢)$ هو متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ $\frac{٢}{١} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٢}$ ∴ المتجهان متوازيان

∴ المستقيم عمودي على المستوى.

٣٥

∵ (١ ، −١ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم

، (٢ ، −١ ، ١) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، بفرض أن θ قياس الزاوية بينهما

∴ جتا θ = $\frac{|(١ ، -١ ، ١) \cdot (٢ ، -١ ، ١)|}{\sqrt{١ + ١ + ١} \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{٢ \sqrt{٢}}{٣}$

∴ θ = ١٩° ٢٨َ

٣٦

∵ (٣ ، ٢ ، ٤) متجه اتجاه المستقيم

، (٢ ، ١ ، −٣) متجه اتجاه عمودي على المستوى

∴ جتا θ = $\frac{|(٣ ، ٢ ، ٤) \cdot (٢ ، ١ ، -٣)|}{\sqrt{٩ + ٤ + ١٦} \sqrt{٤ + ١ + ٩}} = \frac{٤}{\sqrt{٢٩} \sqrt{١٤}}$

∴ ق (د θ) = ٧٨° ٣٣َ

وهي الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودي على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٧٨° ٣٣َ = ١١° ٢٧َ

٣٧

∵ (٢ ، −١ ، ٣) متجه اتجاه المستقيم

، (٣ ، ٢ ، ١) متجه اتجاه عمودي على المستوى

∴ جتا θ = $\frac{|(٢ ، -١ ، ٣) \cdot (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩} \times \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠° وهي الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودي على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

٣٨

∵ جتا θ = $\frac{|(٢ ، ١ ، -٢) \cdot (م ، ١ ، ٠)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤} \sqrt{م^٢ + ١}}$

حيث θ = ٩٠° − ٤٥° = ٤٥°

، ∵ جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{|٢ م + ١|}{٣ \sqrt{م^٢ + ١}}$

∴ $٣ \sqrt{م^٢ + ١} = \sqrt{٢} \, |٢ م + ١|$ بتربيع الطرفين

∴ ٢ (٢ م + ١)^٢ = ٩ (م^٢ + ١)

∴ ٨ م^٢ + ٨ م + ٢ = ٩ م^٢ + ٩

∴ م^٢ − ٨ م + ٧ = ٠

∴ (م − ١) (م − ٧) = ٠

∴ م = ١ ، م = ٧

١٨
∵ ر = (١ ، ٢ ، −١) + ك (٠ ، −١ ، ٢)
∴ س = ١ ، ص = ٢ − ك ، ع = −١ + ٢ك
ونعوض في معادلة المستوى لإيجاد نقطة التقاطع
∴ ٢(١) − (٢ − ك) + (−١ + ٢ك) = ٥
∴ ك = ٢
∴ نقطة التقاطع هي (١ ، ٠ ، ٣)
، ∵ النقطة أ (١ ، ٢ ، −١) تقع على المستقيم
ولنفرض أن مسقطها هي النقطة ب (س١ ، ص١ ، ع١)
∴ أب = ب − أ = (س١ − ١ ، ص١ − ٢ ، ع١ + ١)
∴ أب يوازي المتجه ن = (٢ ، −١ ، ١)
∴ (س١ − ١)/٢ = (ص١ − ٢)/−١ = (ع١ + ١)/١ = ك
∴ س١ = ٢ك + ١ ، ص١ = −ك + ٢
، ع١ = ك − ١ ، ∵ النقطة ب ∈ المستوى
∴ ٢(٢ك + ١) − (−ك + ٢) + (ك − ١) = ٥
∴ ك = ١ ∴ النقطة هي (٣ ، ١ ، ٠)
∴ النقطتان (١ ، ٠ ، ٣) ، (٣ ، ١ ، ٠) تنتميان إلى المسقط
∴ متجه اتجاه المسقط (ه) = (٢ ، ١ ، −٣)
∴ معادلة المسقط هي
ر = (١ ، ٠ ، ٣) + ك (٢ ، ١ ، −٣)
أي أن (س − ١)/٢ = ص/١ = (ع − ٣)/−٣

١٩
لإيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة نقوم بحل المعادلات الثلاثة معًا بطريقة كرامر

Δ = | ٢ ، ١ ، −١ / ١ ، ١ ، ١ / ٣ ، −١ ، −١ |
= ٢ × صفر − ١ × −٤ − ١ × −٤ = ٨

، Δس = | −١ ، ١ ، −١ / ٢ ، ١ ، ١ / ٦ ، −١ ، −١ |
= −١ × صفر − ١ × −٨ − ١ × −٨ = ١٦

، Δص = | ٢ ، −١ ، −١ / ١ ، ٢ ، ١ / ٣ ، ٦ ، −١ |
= ٢ × −٨ + ١ × −٤ − ١ × ٠ = −٢٠

، Δع = | ٢ ، ١ ، −١ / ١ ، ١ ، ٢ / ٣ ، −١ ، ٦ |
= ٢ × ٨ − ١ × صفر − ١ × −٤ = ٢٠

∴ س = ١٦/٨ = ٢ ، ص = −٢٠/٨ = −٥/٢
، ع = ٢٠/٨ = ٥/٢
∴ نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هي: (٢ ، −٥/٢ ، ٥/٢)

7 إجابات تمارين

١
(١) ن١ = (٤ ، ٤ ، −٢) ، ن٢ = (٢ ، ١ ، ١)
∴ جتا θ = |٨ + ٤ − ٢| / (√(١٦ + ١٦ + ٤) × √(٤ + ١ + ١)) = ٥√٦ / ١٨
(٢) ن١ = (٢ ، −١ ، ٤) ، ن٢ = (٣ ، −١ ، ٢)
∴ جتا θ = |٦ + ١ + ٨| / (√(٤ + ١ + ١٦) × √(٩ + ١ + ٤)) = ٥√٦ / ١٤
(٣) ن١ = (٢ ، −١ ، ٢) ، ن٢ = (٣ ، ٢ ، −٦)
∴ جتا θ = |٦ − ٢ − ١٢| / (√(٤ + ١ + ٤) × √(٩ + ٤ + ٣٦)) = ٨/٢١

٢
(١) ن١ = (٢ ، −١ ، ١) ، ن٢ = (٣ ، ٢ ، −٢)
∴ جتا θ = |٦ − ٢ − ٢| / (√(٤ + ١ + ١) × √(٩ + ٤ + ٤)) = √١٠٢ / ٥١
∴ θ ≈ ٧٨° ٤١′ ٤٢″
(٢) ن١ = (٢ ، ١ ، −١) ، ن٢ = (٣ ، −٢ ، ٠)
∴ جتا θ = |٦ − ٢ + ٠| / (√(٤ + ١ + ١) × √(٩ + ٤ + ٠)) = ٢√٧٨ / ٣٩
∴ θ ≈ ٦٣° ٤′ ٦٠″
(٣) ن١ = (٠ ، ١ ، ٠) ، ن٢ = (١ ، −٣ ، ٥)
∴ جتا θ = |٠ − ٣ + ٠| / (√(٠ + ١ + ٠) × √(١ + ٩ + ٢٥)) = ٣√٣٥ / ٣٥
∴ θ ≈ ٥٩° ٢١′ ٤٧″
(٤) ن١ = (١ ، ٣ ، −٤) ، ن٢ = (٢ ، ٢ ، ٢)
∴ جتا θ = |٢ + ٦ − ٨| / (√(١ + ٩ + ١٦) × √(٤ + ٤ + ٤)) = صفر
∴ θ = ٩٠°
(٥) ن١ = (٣ ، −١ ، ٠) ، ن٢ = (١ ، −٢ ، ٠)
∴ جتا θ = |٣ + ٢ + ٠| / (√(٩ + ١) × √(١ + ٤)) = ١/√٢
∴ θ = ٤٥°
(٦) ن١ = (١ ، −٣ ، ٢) ، ن٢ = (٢ ، ١ ، −١)
∴ جتا θ = |٢ − ٣ − ٢| / (√(١ + ٩ + ٤) × √(٤ + ١ + ١)) = √٢١ / ١٤
∴ θ ≈ ٧٠° ٥٣′ ٣٦″

٣
(١) ∵ المستويين متوازيان
∴ ٢/١ = −١/ل = ك/٤ ∴ ل = −١/٢ ، ك = ٨
(٢) ∵ المستويين متوازيان
∴ ٦/٣ = [illegible]/−ك = ل/٥ ∴ ك = ٠ ، ل = ١٠
(٣) ∵ المستويين متوازيان
∴ −٢/٥ = ك/٤ = ٥ل/−٢٠ ∴ ل = ك = −١٫٦

٤
(١) ∵ المستويين متعامدان
∴ (٣ ، −٤ ، ٢) . (٣ ، ٤ ، −أ) = ٠
∴ ٩ − ١٦ − ٢أ = ٠ ∴ أ = −٣٫٥
(٢) ∵ المستويين متعامدان
∴ (١ ، −٣ ، ١) . (أ ، ٢ ، ٣) = ٠
∴ أ − ٦ + ٣ = ٠ ∴ أ = ٣
(٣) ∵ المستويين متعامدان
∴ (٣ ، −٥ ، أ) . (١ ، ٣ ، ٢) = ٠
∴ ٣ − ١٥ + ٢أ = ٠ ∴ أ = ٦
(٤) ∵ المستويين متعامدان
∴ (٧ ، −٢ ، ٠) . (أ ، ١ ، −٣) = ٠
∴ ٧أ − ٢ = ٠ ∴ أ = ٢/٧

٥
∵ ٢/٢ ≠ ٣/−٦
∴ المستويان متقاطعان
، ∵ (٢ ، ٣ ، ٤) . (٣ ، −٦ ، ٠) = ٦ − ١٨ + ٠
= −١٢ ≠ صفر
∴ المستويان متقاطعان وغير متعامدين.

٦
(١) (ج) (٢) (ب) (٣) (ج) (٤) (ج) (٥) (د)
(٦) (ج) (٧) (ب) (٨) (أ) (٩) (د) (١٠) (ج)
(١١) (أ) (١٢) (د) (١٣) (ب) (١٤) (د) (١٥) (ب)
(١٦) (ب) (١٧) (د) (١٨) (ج) (١٩) (ج) (٢٠) (ب)

(٢١) (ب) (٢٢) (ج) (٢٣) (ج) (٢٤) (د) (٢٥) (أ)
(٢٦) (ب) (٢٧) (ج) (٢٨) (ب) (٢٩) (ج) (٣٠) (د)
(٣١) (د) (٣٢) (ب) (٣٣) (ج) (٣٤) (ج) (٣٥) (أ)
(٣٦) (د) (٣٧) (ج) (٣٨) (د) (٣٩) (ج)

٧
(١) معادلتا المستويين هما:
٣س − ص + ٢ع = ٣ (١)
، س − ٢ص + ٥ع = ٢ (٢)
∴ ٣/١ ≠ −١/−٢ ∴ المستويان متقاطعان
، بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)
∴ −٥س + ع = −٤
∴ ع = −٤ + ٥س (٣)
ويضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)
∴ ٥ص − ١٣ع = −٣
∴ ع = (٥ص + ٣)/١٣ (٤)
من (٣) ، (٤):
∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هي
−٤ + ٥س = (٥ص + ٣)/١٣ = ع
(٢) معادلتا المستويين هما:
س + ٢ص − ٢ع = ١ (١)
، ٢س + ص − ٣ع = ٥ (٢)
بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)
∴ −٣ص + ع = ٣ ، وبوضع ص = ك
∴ ع = ٣ + ٣ك وبالتعويض في (١)
∴ س + ٢ك − ٢(٣ + ٣ك) = ١
∴ س = ٧ + ٤ك
∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هي
س = ٧ + ٤ك ، ص = ك ، ع = ٣ + ٣ك
(٣) معادلتا المستويين هما
[illegible] = ١ (١)
[illegible] = ٢ (٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع = | س ، ص ، ع / ٣ ، −١ ، ١ / ١ ، ٤ ، −٢ |
= (−٢ ، ٧ ، ١٣)
، بوضع س = ٠ في معادلتي المستويين
∴ (٠ ، ص ، ع) . (٣ ، −١ ، ١) = ١
∴ −ص + ع = ١ (٣)
، (٠ ، ص ، ع) . (١ ، ٤ ، −٢) = ٢
∴ ٤ص − ٢ع = ٢
∴ ٢ص − ع = ١ (٤)
ويجمع (٣) ، (٤)
∴ ص = ٢ وبالتعويض في (٣) ∴ ع = ٣
∴ النقطة (٠ ، ٢ ، ٣) تقع على خط التقاطع
∴ الصورة الاتجاهية لمعادلة خط التقاطع هي
ر = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ٧ ، ١٣)

٨
متجه اتجاه خط التقاطع = | س ، ص ، ع / ١ ، ١ ، ١ / ١ ، ٠ ، ١ |
= س − ع = (١ ، ٠ ، −١)
وبوضع س = ٠ في المعادلتين
∴ ع = ٠ ، ص = ١
∴ خط التقاطع يمر بالنقطة (٠ ، ١ ، ٠)
∴ معادلة خط التقاطع هي
ر = (٠ ، ١ ، ٠) + ك (١ ، ٠ ، −١) (الصورة المتجهة)
∴ س = ك ، ص = ١ ، ع = −ك (الصورة البارامترية)
∴ س/١ = ع/−١ ، ص = ١ (الصورة الكارتيزية)
أي أن س + ع = ٠ ، ص = ١

٩
معادلتا المستويين هما:
٣س − ص − ع = ٢ (١)
، س − ٢ص + ٢ع = ١ (٢)
، ∵ ٣/١ ≠ −١/−٢
∴ المستويان متقاطعان
ويضرب المعادلة (١) × ٢ والجمع إلى (٢)
∴ ٧س − ٤ص = ٥
∴ س = (٥ + ٤ص)/٧ (٣)
ويضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)
∴ −٥س + ٤ع = −٣
∴ س = (٤ع + ٣)/٥ (٤)
من (٣) ، (٤):
∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هي
س = (٥ + ٤ص)/٧ = (٤ع + ٣)/٥

١٠
متجه اتجاه خط التقاطع = | س ، ص ، ع / ١ ، ١ ، −١ / ١ ، −١ ، −٥ |
= (−٦ ، ٤ ، −٢)
، متجه اتجاه المستقيم المعطى = (٣ ، −٢ ، ١)
، ∵ −٦/٣ = ٤/−٢ = −٢/١
∴ خط تقاطع المستويين يوازي المستقيم المعطى.

١١
متجه الاتجاه العمودي للمستوى المطلوب
= (١ ، ٢ ، −٢) × (٣ ، −١ ، ٢)
= | س ، ص ، ع / ١ ، ٢ ، −٢ / ٣ ، −١ ، ٢ | = (١ ، −١١ ، −٧)
∴ معادلة المستوى المطلوب هي
ر . (١ ، −١١ ، −٧) = [illegible]
∴ س − ١١ص − ٧ع = ٣

١٢
المستوى يمر بالنقطتين أ (١ ، −١ ، ١) ، ب (−١ ، ١ ، ١)
∴ أب = (−٢ ، ٢ ، ٠) متجه يوازي المستوى
، ∴ (١ ، ٢ ، ٢) متجه الاتجاه العمودي للمستوى المعطى
∴ ن = (−٢ ، ٢ ، ٠) × (١ ، ٢ ، ٢)
متجه الاتجاه العمودي للمستوى المطلوب
∴ ن = | س ، ص ، ع / −٢ ، ٢ ، ٠ / ١ ، ٢ ، ٢ | = (٤ ، ٤ ، −٦)
∴ معادلة المستوى المطلوب هي
ر . (٤ ، ٤ ، −٦) = (١ ، −١ ، ١) . (٤ ، ٤ ، −٦)
∴ ٤س + ٤ص − ٦ع = −٦
∴ ٢س + ٢ص − ٣ع + ٣ = ٠

١٣
متجه اتجاه خط التقاطع = | س ، ص ، ع / ١ ، ١ ، ٢ / ٢ ، ١ ، −١ |
= (−٣ ، ٥ ، −١)
، ∵ خط التقاطع يقع في المستوى المطلوب
∴ المتجه (−٣ ، ٥ ، −١) يوازي المستوى المطلوب
، ∵ م١م٢ = (٣ ، −٢ ، ٢) − (٢ ، ٥ ، −٣)
= (١ ، −٧ ، ٥) يوازي المستوى المطلوب
∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب
= | س ، ص ، ع / −٣ ، ٥ ، −١ / ١ ، −٧ ، ٥ | = (١٨ ، ١٤ ، ١٦)
، بوضع س = ٠ في كل من معادلتي المستويين
∴ ص + ٢ع = −١ ، ص − ع = −١
وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = −١ ، ع = ٠

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$. (١٨ ، ١٤ ، ١٦) = (١٨ ، ١٤ ، ١٦) . (٠ ، −١ ، ٠)

∴ ١٨ س + ١٤ ص + ١٦ ع = −١٤

١٤

∵ المستوى ٣ س + ٢ ص + ع + ٦ = ٠

عموديًا على المستوى المطلوب.

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & −١ \end{vmatrix}$

= (−٥ ، ٧ ، −٣)

∴ المتجه (−٥ ، ٧ ، −٣) يوازى المستوى المطلوب أيضًا

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٢ & ١ \\ −٥ & ٧ & −٣ \end{vmatrix}$ = (−١٣ ، ٤ ، ٣١)

، بوضع س = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ص − ع = −٨

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = −٤ ، ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$. (−١٣ ، ٤ ، ٣١) = (٠ ، −٤ ، ٤) . (−١٣ ، ٤ ، ٣١)

∴ −١٣ س + ٤ ص + ٣١ ع = ١٠٨

١٥

• معادلة خط تقاطع المستويين :

٦ س + ٤ ص + ٣ ع = −٥ (١)

، ٢ س + ص + ع = ٢ (٢)

بضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)

∴ ص = −١١ وبالتعويض فى (١)

∴ ٦ س − ٤٤ + ٣ ع = −٥

∴ ٢ س = ١٣ − ع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

٢ س = ١٣ − ع ، ص = −١١

∴ النقطة (٠ ، −١١ ، ١٣) تقع على خط التقاطع

، المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه لخط التقاطع

∴ المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ المتجه (٠ ، −١١ ، ١٣) − (٢ ، −٣ ، ٢)

= (−٢ ، −٨ ، ١١) يقع فى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ \frac{١}{٢} & ٠ & −١ \\ −٢ & −٨ & ١١ \end{vmatrix}$ = (−٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$. (−٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

= (٢ ، −٣ ، ٢) . (−٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ −٨ س − $\frac{٧}{٢}$ ص − ٤ ع = $\frac{−٢٧}{٢}$

∴ ١٦ س + ٧ ص + ٨ ع = ٢٧

١٦

البعد المطلوب = $\frac{|٨(٣) − ٢(−٥) + ٢ − ٥|}{\sqrt{٦٤ + ٤ + ١}}$

= $\frac{٣١}{\sqrt{٦٩}}$ وحدة طول.

١٧

معادلة المستوى هى :

٢ س + ٢ ص − ع − ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢(١) + ٢(−١) − ٣ − ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

= $\frac{٨}{٣}$ وحدة طول.

١٨

معادلة المستوى هى :

س − ٢ ص + ٤ ع − ٩ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ − ٢(١) + ٤(−١) − ٩|}{\sqrt{١ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$ وحدة طول.

١٩

∴ $\frac{|\sqrt{٢}(٠) + (−١) − (٢) + ك|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$ = ٢

∴ |ك − ٣| = ٤ ∴ ك − ٣ = ± ٤

∴ ك = ٧ أ، ك = −١

٢٠

طول العمود من مركز الكرة إلى المستوى = نق

∴ $\frac{|٢(٢) + ٦(−١) − ٣(−٢) + ك|}{\sqrt{٤ + ٣٦ + ٩}}$ = ٣

∴ |٤ + ك| = ٢١

∴ ٤ + ك = ٢١ ∴ ك = ١٧

أ، ٤ + ك = −٢١ ∴ ك = −٢٥

٢١

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

∴ نق = $\frac{|١ + ٢ + ١ − ١١|}{\sqrt{١ + ١ + ١}}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى :

$(س − ١)^٢ + (ص − ٢)^٢ + (ع − ١)^٢ = ٣$

٢٢

بفرض النقطة (أ ، ٠ ، ٠)

∴ $\frac{|١٢أ + ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥٦ + ٢٢٥}} = \frac{|٢أ − ١|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

∴ ٣ |١٢ أ + ١| = ٢٥ |٢ أ − ١|

∴ ٣ (١٢ أ + ١) = ± ٢٥ (٢ أ − ١)

∴ ٣ (١٢ أ + ١) = ٢٥ (٢ أ − ١)

∴ ٣٦ أ + ٣ = ٥٠ أ − ٢٥

∴ ١٤ أ = ٢٨ ∴ أ = ٢

أ، ٣ (١٢ أ + ١) = −٢٥ (٢ أ − ١)

∴ ٣٦ أ + ٣ = −٥٠ أ + ٢٥

∴ ٨٦ أ = ٢٢ ∴ أ = $\frac{١١}{٤٣}$

∴ النقطة هى (٢ ، ٠ ، ٠) أ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)

٢٣

∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى

٢ س + ص − ٤ ع = ٠

∴ معادلته هى : ٢ س + ص − ٤ ع + ء = ٠

، ∵ طول العمود من (١ ، ٢ ، ٠) عليه = $\sqrt{٢١}$

∴ $\frac{|٢(١) + ٢ − ٤(٠) + ء|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}} = \sqrt{٢١}$

∴ |٤ + ء| = ٢١ ∴ ٤ + ء = ٢١

∴ ء = ١٧ أ، ٤ + ء = −٢١ ∴ ء = −٢٥

∴ معادلة المستوى هى :

٢ س + ص − ٤ ع + ١٧ = ٠

أ، ٢ س + ص − ٤ ع − ٢٥ = ٠

٢٤

$\overrightarrow{م_١م_٢}$ = (−٣ ، ٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{م_٢م_٣}$ = (٦ ، −٦ ، −٥)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

= $\overrightarrow{م_١م_٢} \times \overrightarrow{م_٢م_٣}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ −٣ & ٢ & ٢ \\ ٦ & −٦ & −٥ \end{vmatrix}$ = (٢ ، −٣ ، ٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$. (٢ ، −٣ ، ٦) = (١ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٣ ، ٦)

∴ ٢ س − ٣ ص + ٦ ع − ١١ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢(−١) − ٣(١) + ٦(−٢) − ١١|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}}$

= ٤ وحدة طول.

٢٥

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{−٢}{−٤} = \frac{٢}{٤} \neq \frac{−١}{−٣}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

∴ نوجد نقطة ∈ للمستوى الأول وذلك بفرض

س = ٠ ، ص = ٠

∴ ع = $\frac{١}{٢}$

∴ (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|٢(٠) − ٤(٠) + ٤(\frac{١}{٢}) − ٣|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ١٦}}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة طول.

٢٦

∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} \neq \frac{−٨}{٥}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

، بوضع س = ٠ ، ص = ٠ فى معادلة المستوى الأول

∴ ع = ٤

، (٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للمستوى الأول

= $\frac{|٤(٠) + ٢(٠) + ٤(٤) + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{٢١}{٦}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$ وحدة طول.

٢٧

بفرض (س١ ، ص١ ، ع١) ∈ للمستوى ط١

∴ المسافة بين المستويين = طول العمود المرسوم

من (س١ ، ص١ ، ع١)

إلى المستوى ط٢

∴ المسافة بين المستويين =

$\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + ء_٢|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

، من معادلة المستوى الأول

∴ أ س١ + ب ص١ + جـ ع١ = −ء١

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|ء_٢ − ء_١|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$ وحدة طول.

٢٨

∵ (١ ، −١ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم

، (١ ، ٥ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ (١ ، −١ ، ٤) . (١ ، ٥ ، ١) = ١ − ٥ + ٤ = ٠

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ (٢ ، −٢ ، ٣) ∈ للمستقيم ، معادلة المستوى هى

س + ٥ ص + ع − ٥ = ٠

∴ البعد بين المستقيم والمستوى

= طول العمود من (٢ ، −٢ ، ٣) إلى المستوى

= $\frac{|٢ + ٥(−٢) + ٣ − ٥|}{\sqrt{١ + ٢٥ + ١}}$ = $\frac{١٠}{٣\sqrt{٣}}$ وحدة طول.

٢٩

① $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} − \overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٠ ، −١ ، ١)

= (٢ ، ٠ ، ٢)

، $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} − \overrightarrow{ب}$ = (−١ ، −٢ ، ٢)

− (٢ ، −١ ، ٣) = (−٣ ، −١ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب جـ

= $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بجـ}$

$\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ −٣ & −١ & −١ \end{vmatrix}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ − ٢ $\overrightarrow{ع}$

② معادلة المستوى أ ب جـ هى :

$\overrightarrow{ر}$. (٢ ، −٤ ، −٢) = (٠ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٤ ، −٢)

٢ س − ٤ ص − ٢ ع − ٢ = ٠

∴ طول العمود من ء

= $\frac{|٢(٧) − ٤(−٤) − ٢(٢) − ٢|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ٤}}$ = ٢ $\sqrt{٦}$ وحدة طول.

③ $\overrightarrow{بء}$ = (٧ ، −٤ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٣)

= (٥ ، −٣ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب جـ ء

= $\overrightarrow{بء} \times \overrightarrow{بجـ}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٥ & −٣ & −١ \\ −٣ & −١ & −١ \end{vmatrix}$

= (٢ ، ٨ ، −١٤)

، ∵ (متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب جـ)

. (متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب جـ ء)

= (٢ ، −٤ ، −٢) . (٢ ، ٨ ، −١٤) = صفر

∴ المستويان متعامدان.

④ متجه الاتجاه العمودى على المستوى و ء ب

= $\overrightarrow{وء} \times \overrightarrow{وب}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٧ & −٤ & ٢ \\ ٢ & −١ & ٣ \end{vmatrix}$

= (−١٠ ، −١٧ ، ١)

، ∵ متجه الاتجاه العمودى للمستوى أ ب جـ

= (٢ ، −٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع

= (٢ ، −٤ ، −٢) × (−١٠ ، −١٧ ، ١)

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & −٤ & −٢ \\ −١٠ & −١٧ & ١ \end{vmatrix}$ = (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

، ∵ ب ∈ للمستويين

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

٣٠

① المعادلة الإحداثية للمستوى س :

$\begin{vmatrix} س − ١ & ص − ٤ & ع − ٢ \\ ١ − ١ & ٠ − ٤ & ٥ − ٢ \\ ٠ − ١ & ٨ − ٤ & −١ − ٢ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ $\begin{vmatrix} (س − ١) & (ص − ٤) & (ع − ٢) \\ ٠ & −٤ & ٣ \\ −١ & ٤ & −٣ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ −٣ (ص − ٤) − ٤ (ع − ٢) = ٠

∴ ٣ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠

② معادلة المستوى ص :

$\overrightarrow{ر}$. (١ ، ٢ ، ٢) = (٢ ، ٢ ، ٣) . (١ ، ٢ ، ٢)

∴ س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

③ ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كلا المستويين

∴ ٣ (٠) + ٤ (ف) − ٢٠ = ٠

∴ ف = ٥

، ط + ٢ (٠) + ٢ (ف) −١٢ = ٠

∴ ط = ٢

④ متجه الاتجاه لخط التقاطع

$$= \begin{vmatrix} \overset{\frown}{س} & \overset{\frown}{ص} & \overset{\frown}{ع} \\ ٠ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = (−٢ ، ٤ ، −٣)$$

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين

∴ (٢ ، ٠ ، ٥) تقع فى خط التقاطع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overset{\frown}{ر}$ = (٢ ، ٠ ، ٥) + ك (−٢ ، ٤ ، −٣)

⑤ ∵ $\dfrac{|٣ (١) + ٤ (ن) − ٢٠|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

$= \dfrac{|١ + ٢ (١) + ٢ (ن) − ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$

∴ $\dfrac{|٤ ن − ١٧|}{٥} = \dfrac{|٢ ن − ٩|}{٣}$

∴ ٥ | ٢ ن − ٩ | = ٣ | ٤ ن − ١٧ |

∴ ٥ (٢ ن − ٩) = ± ٣ (٤ ن − ١٧)

∴ ١٠ ن − ٤٥ = ١٢ ن − ٥١ ومنها ن = ٣

أ، ١٠ ن − ٤٥ = −١٢ ن + ٥١ ومنها ن = $\frac{٤٨}{١١}$

٣١

مركز الكرة هو ن (٠ ، ١ ، ٢)

وطول نصف قطرها م ن

= $\sqrt{١^٢ + ٢^٢ − (−١١)}$ = ٤ وحدة طول.

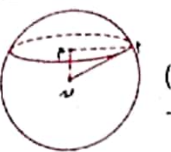
، عندما يقطع مستوى كرة فإن المقطع الناتج هو دائرة ويكون المستقيم الواصل بين مركزها ومركز الكرة عموديًا على مستوى الدائرة

∴ م ن = طول العمود من ن إلى المستوى

$= \dfrac{|٠ + ٢ (١) + ٢ (٢) − ١٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$ = ٣ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{٤^٢ − ٣^٢} = \sqrt{٧}$ وحدة طول.

٣٢



مركز الكرة هو ن (−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها م ن = $\sqrt{١٥}$

، ∵ م ن = $\dfrac{|٢ (−٣) − (−٢) − ٢ (١) + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}}$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{١٥ − ٤} = \sqrt{١١}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

٣٣

∵ محيط المقطع الناتج = ٨ π

∴ ٢ π نق = ٨ π

∴ نق للدائرة = ٤ وحدة طول

، ∵ طول العمود من ن إلى المستوى

$= \dfrac{|٢ (٢) − ٢ (٣) + (−٢) − ٥|}{\sqrt{(٢)^٢ + (−٢)^٢ + (١)^٢}}$ = ٣ وحدة طول.

∴ م ن = $\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}$ = ٥ وحدة طول.

∴ نق للكرة = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

(س − ٢)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٢٥

٣٤

بفرض (س ، ص ، ع) أى نقطة فى المستوى المطلوب

، ∵ المستوى المطلوب ينصف الزاوية بين المستويين

ط$_١$: ٧ س + ص − ٦ = ٠

، ط$_٢$: ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١ = ٠

∴ البعد العمودى من (س ، ص ، ع) إلى كل من المستويين متساوى

∴ $\dfrac{|٧ س + ص − ٦|}{\sqrt{٤٩ + ١}} = \dfrac{|٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١|}{\sqrt{٩ + ٢٥ + ١٦}}$

∴ ٧ س + ص − ٦ = ± (٣ س + ٥ ص − ٤ ع +

∴ ٧ س + ص − ٦ = ٣ س + ٥ ص − ٤ ع +

∴ ٤ س − ٤ ص + ٤ ع − ٧ = ٠

أ، ٧ س + ص − ٦ = −٣ س − ٥ ص + ٤ ع −

∴ ١٠ س + ٦ ص − ٤ ع − ٥ = ٠

أى أن هناك مستويين متعامدين أحدهما ينصف الزاوية الحادة بين المستويين ط$_١$ ، ط$_٢$ والآخر ينـ الزاوية المنفرجة بينهما.

③ ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كلا المستويين

∴ ٣ (٠) + ٤ (ف) − ٢٠ = ٠

∴ ف = ٥

، ط + ٢ (٠) + ٢ (ف) −١٢ = ٠

∴ ط = ٢

④ متجه الاتجاه لخط التقاطع

= | س ص ع ؛ ٠ ٣ ٤ ؛ ١ ٢ ٢ | = (−٢ ، ٤ ، −٣)

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين

∴ (٢ ، ٠ ، ٥) تقع فى خط التقاطع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

ر = (٢ ، ٠ ، ٥) + ك (−٢ ، ٤ ، −٣)

⑤ ∵ |٣ (١) + ٤ (ن) − ٢٠| / √(٩ + ١٦)

= |١ + ٢ (١) + ٢ (ن) − ١٢| / √(١ + ٤ + ٤)

∴ |٤ ن − ١٧| / ٥ = |٢ ن − ٩| / ٣

∴ ٥ |٢ ن − ٩| = ٣ |٤ ن − ١٧|

∴ ٥ (٢ ن − ٩) = ± ٣ (٤ ن − ١٧)

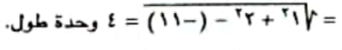
∴ ١٠ ن − ٤٥ = ١٢ ن − ٥١ ومنها ن = ٣

أ، ١٠ ن − ٤٥ = −١٢ ن + ٥١ ومنها ن = ٤٨/١١


٣١

مركز الكرة هو ن (٠ ، ١ ، ٢)

وطول نصف قطرها ا ن


= √(١² + ٢² − (−١١)) = ٤ وحدة طول.

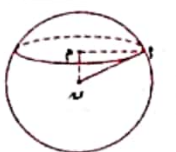
، عندما يقطع مستوى كرة فإن المقطع الناتج هو دائرة ويكون المستقيم الواصل بين مركزها ومركز الكرة عموديًا على مستوى الدائرة

∴ م ن = طول العمود من ن إلى المستوى

= |٠ + ٢ (١) + ٢ (٢) − ١٥| / √(١ + ٤ + ٤) = ٣ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = √(٤² − ٣²) = √٧ وحدة طول.

٣٢



مركز الكرة هو ن (−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها ا ن = √١٥

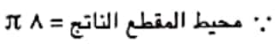
، ∵ م ن = |٢ (−٣) − (−٢) − ٢ (١) + ١٢| / √(٤ + ١ + ٤)

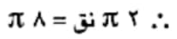
= ٢ وحدة طول.

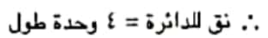
∴ نق للدائرة = √(١٥ − ٤) = √١١ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

٣٣


∵ محيط المقطع الناتج = ٨ π


∴ ٢ π نق = ٨ π


∴ نق للدائرة = ٤ وحدة طول

، ∵ طول العمود من ن إلى المستوى

= |٢ (٢) − ٢ (٣) + (−٢) − ٥| / √((٢)² + (−٢)² + (١)²) = ٣ وحدة طول.

∴ ا ن = √((٤)² + (٣)²) = ٥ وحدة طول.

∴ نق للكرة = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

(س − ٢)² + (ص − ٣)² + (ع + ٢)² = ٢٥

٣٤

بفرض (س ، ص ، ع) أى نقطة فى المستوى المطلوب

، ∵ المستوى المطلوب ينصف الزاوية بين المستويين

ط١ : ٧ س + ص − ٦ = ٠

، ط٢ : ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١ = ٠

∴ البعد العمودى من (س ، ص ، ع) إلى كل من المستويين متساوى

∴ |٧ س + ص − ٦| / √(٤٩ + ١) = |٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١| / √(٩ + ٢٥ + ١٦)

∴ ٧ س + ص − ٦ = ± (٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١)

∴ ٧ س + ص − ٦ = ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١

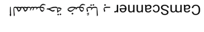
∴ ٤ س − ٤ ص + ٤ ع − ٧ = ٠

أ، ٧ س + ص − ٦ = −٣ س − ٥ ص + ٤ ع − ١

∴ ١٠ س + ٦ ص − ٤ ع − ٥ = ٠

أى أن هناك مستويين متعامدين أحدهما ينصف الزاوية الحادة بين المستويين ط١ ، ط٢ والآخر ينصف الزاوية المنفرجة بينهما.

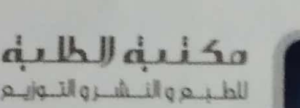
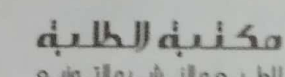


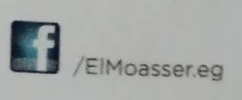


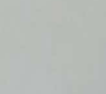
الجبر و الهندسة الفراغية
الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات
يصرف مجانًا مع الكتاب





مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠١٢٢٢٥٩٣٤٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤





6 223007 310642